GIORNATE MATEMATICHE
La matematica nel primo biennio

Bologna, 29 novembre 2012

Donatella Martini IT Baldini RAVENNA

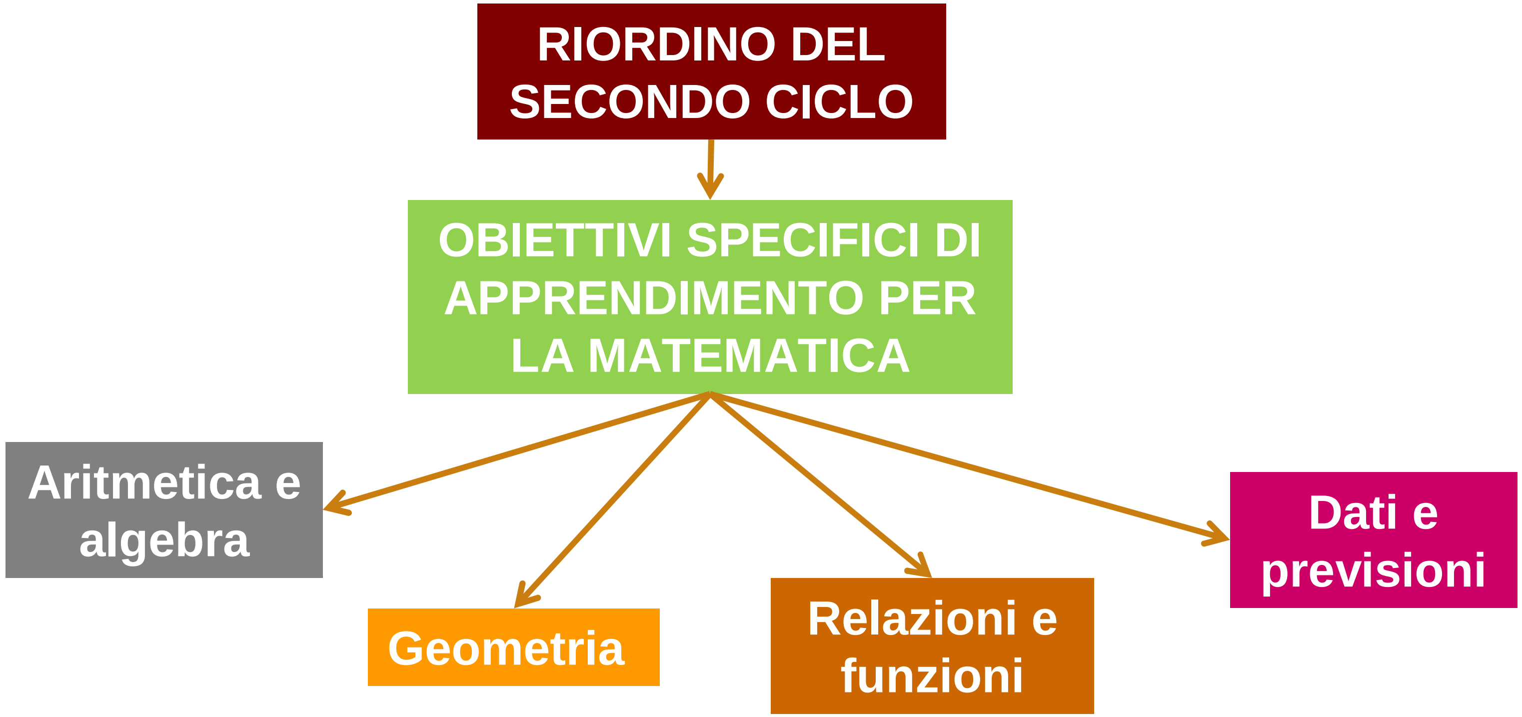
TAVOLA DEGLI APPRENDIMENTI

Risultati di apprendimento a conclusione del primo biennio

1. P(x) è divisibile per x-a se e solo se P(a)=0
2. La somma degli angoli esterni di un poligono è invariante
3. La divisione di un segmento in n parti uguali
4. La radice di 2 è un numero irrazionale
5. Fattorizzare un trinomio di 2°grado
6. Dimostrare il teorema di Pitagora
7. a(b+c)=ab+ac
8. Un altro invariante: il teorema dei seni
9. Costruire la sezione aurea di un segmento
10. La gerarchia degli insiemi N, Z, Q, R
11. La probabilità è un numero compreso tra 0 e 1
12. Le medie e la disuguaglianza
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$
13. $\sqrt{a}$: approssimazione numerica e costruzione geometrica
14. Disegnare nel piano cartesiano il grafico di ax+by+c=0
15. Disegnare nel piano cartesiano il grafico di una funzione di secondo grado
16. Risolvere il sistema: $\begin{cases} \sqrt{x-3}+\sqrt{y+7}=8 \\ x+y=30 \end{cases}$

TAVOLA DEGLI APPRENDIMENTI

Risultati di apprendimento a conclusione del primo biennio



DOVE COLLOCARLI NELLA PROGETTAZIONE DIDATTICA?

Risultati di apprendimento a conclusione del I biennio

ARITMETICA E ALGEBRA

10 - La gerarchia degli insiemi N, Z, Q, R

- I numeri: naturali, interi, razionali, sotto forma frazionaria e decimale, irrazionali e, in forma intuitiva, reali; ordinamento e loro rappresentazione su una retta.
- Le operazioni con i numeri interi e razionali e le loro proprietà.
- Potenze e radici. Rapporti e percentuali.
- Approssimazioni.
- Le espressioni letterali e i polinomi.
- Operazioni con i polinomi.

4 - La radice di 2 è un numero irrazionale

7 - a(b+c)=ab+ac

13 - √α : approssimazione numerica e costruzione geometrica

5 - Fattorizzare un trinomio di 2°grado

1 - P(x) è divisibile per x-a se e solo se P(a)=0

Risultati di apprendimento a conclusione del I biennio

GEOMETRIA

- Gli enti fondamentali della geometria
- Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio.
- Il piano euclideo: relazioni tra rette, congruenza di figure, poligoni e loro proprietà. Circonferenza e cerchio. Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide Teorema di Pitagora.
- Teorema di Talete e sue conseguenze. Le principali trasformazioni geometriche e loro invarianti (isometrie e similitudini).

2 - La somma degli angoli esterni di un poligono è invariante

8 - Un altro invariante: il teorema dei seni

6 - Dimostrare il teorema di Pitagora

9 - Costruire la sezione aurea di un segmento

3 - La divisione di un segmento in n parti uguali

Risultati di apprendimento a conclusione del I biennio

RELAZIONI E FUNZIONI

- Le funzioni e la loro rappresentazione.
- Linguaggio degli insiemi e delle funzioni.
- Collegamento con il concetto di equazione. Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa).
- Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni e di disequazioni.
- Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.
- Rappresentazione grafica delle funzioni.

16 - Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x-3}+\sqrt{y+7}=8 \\ x+y=30 \end{cases}$$

14 - Disegnare nel piano cartesiano il grafico di ax+by+c=0

15 - Disegnare nel piano cartesiano il grafico di una funzione di secondo grado

Risultati di apprendimento a conclusione del I biennio

DATI E PREVISIONI

- Dati, loro organizzazione e rappresentazione. Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere e principali rappresentazioni grafiche.
- Valori medi e misure di variabilità.
- Significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. Probabilità e frequenza.

12 - Le medie e la disuguaglianza

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

11 - La probabilità è un numero compreso tra 0 e 1

Giornate matematiche

La matematica nel primo biennio

Costruzione degli itinerari di apprendimento

Costruzione degli itinerari di apprendimento

SCHEMA DI PROGETTAZIONE

- Quali prerequisiti e quale l’impostazione
- Connessione con gli altri risultati
- Organizzazione di un percorso e sua collocazione nella progettazione didattica complessiva
- Esempi di prove di verifica

Giornate matematiche

9 - Costruire la sezione aurea di un segmento

La geometria ha due grandi tesori: uno è il Teorema di Pitagora; l'altro è la divisione di una linea in media ed estrema ragione. Possiamo paragonare il primo ad una misura d'oro e chiamare il secondo un prezioso gioiello" (Keplero)

Costruire la sezione aurea di un segmento

IMPOSTAZIONE

- Partire da un esempio preso dalla realtà vicina agli studenti (tessera dello studente, tessera sanitaria, codice fiscale, figc, ecc.) per introdurre il numero aureo per arrivare alla definizione e costruzione della sezione aurea di un segmento

La scelta deriva dalla necessità di rendere il tema coinvolgente per stimolare al massimo curiosità, motivazione e partecipazione degli studenti

Costruire la sezione aurea di un segmento

PREREQUISITI

- **Conoscenze:**
  - Rapporti e proporzioni
  - Teorema di Pitagora
  - Circonferenza
  - Numeri irrazionali
  - Equazioni di primo e secondo grado
- **Abilità**
  - Costruire semplici figure geometriche con riga e compasso (punto medio, retta perpendicolare, quadrato, ecc.)
  - Utilizzare di software di geometria dinamica
  - Impostare e risolvere proporzioni ed equazioni
  - Operare con i radicali

Costruire la sezione aurea di un segmento

CONNESSIONE CON GLI ALTRI RISULTATI

- 3. La divisione di un segmento in n parti proporzionali
- 4. La radice di 2 è un numero irrazionale
- 6. Dimostrare il teorema di Pitagora
- 10. La gerarchia degli insiemi N,Z,Q,R
- 13. $\sqrt{a}$: approssimazione numerica e costruzione geometrica

Costruire la sezione aurea di un segmento

COLLOCAZIONE NELLA PROGETTAZIONE DIDATTICA

Periodo - termine del secondo anno

Discipline collegate - disegno, storia dell’arte, musica (dove presenti), scienze, storia, italiano.

Competenza prevalente - Confrontare ed analizzare figure geometriche individuando invarianti e relazioni

Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

- **FASE 1: il numero aureo**
  - Osservazione e misura di una serie di rettangoli all'interno di oggetti (tessere….) e immagini tratte dall'arte e dalla natura.
  - Calcolo del rapporto delle dimensioni dei rettangoli e scoperta del numero φ.
  - Contestualizzazione storica (Euclide, Fidia, Pacioli, Leonardo, Rinascimento…)

Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

- **FASE 2: esempi di costruzioni geometriche con riga e compasso e/o con software di geometria**
  - Costruzione del rettangolo aureo e verifica algebrica (il numero φ)
  - Costruzione del rettangolo aureo attraverso la piegatura di un foglio (Math2012)
  - Sezione aurea di un segmento e la matematica per interpretare il bello:
    - Costruzione della sezione aurea di un segmento e verifica
    - Verifica algebrica e calcolo del numero φ
    - Costruzione con Geogebra

Organizzazione del percorso

COSTRUZIONE DEL RETTANGOLO AUREO

dalla sezione aurea al segmento

Conoscenze e abilità richieste per la costruzione geometrica

•costruire figure geometriche (quadrati, rettangoli) tramite riga e compasso o software di geometria dinamica

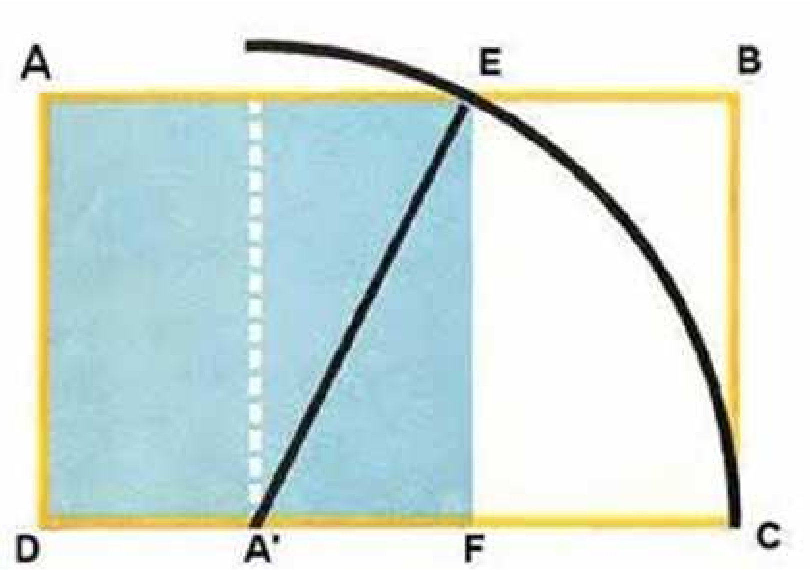
•determinare il punto medio di un segmento

•trasportare un segmento

per la verifica algebrica

•teorema di Pitagora

•operare con radicali o calcolatrice



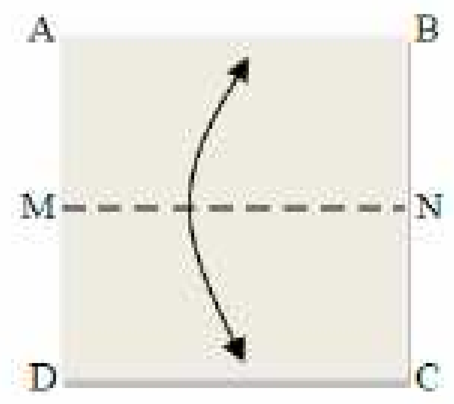
Costruire la sezione aurea di un segmento

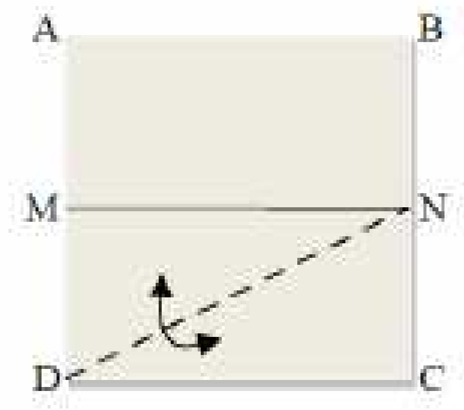
Organizzazione del percorso

COSTRUZIONE DEL RETTANGOLO AUREO ATTRAVERSO LA PIEGATURA DEL FOGLIO (Math 2012)

ISTRUZIONI PER LA COSTRUZIONE

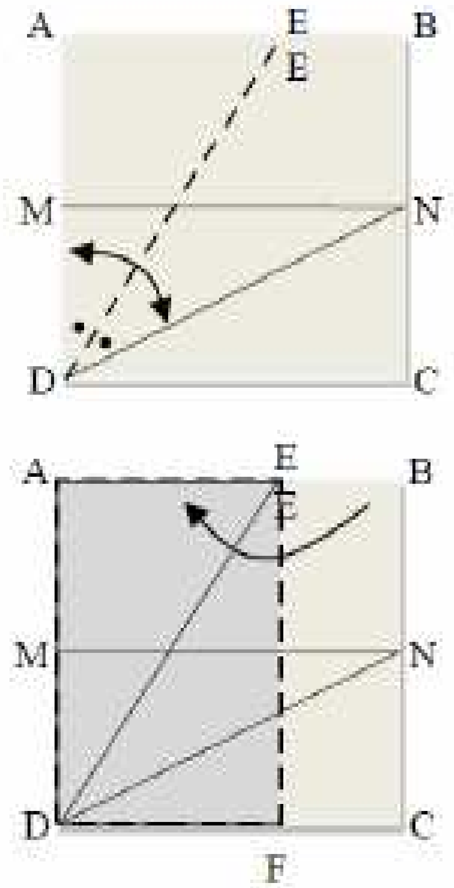
- Prendi un foglio di carta e ricava un quadrato di lato AB
- Piega lungo la mediana MN e riapri
- Piega lungo la diagonale DN e riapri





Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

- Piega lungo la bisettrice DE dell'angolo ADN portando il lato DA sul lato DN e riapri
- AE è la **sezione aurea** di AB. Per ottenere il rettangolo aureo, piega sovrapponendo BE ad AE.
- AEFD è il **rettangolo aureo**



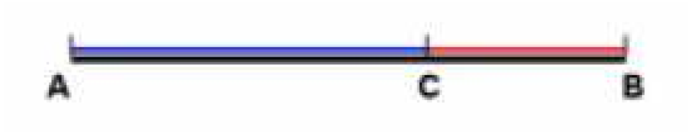
Conoscenze e abilità richieste per la dimostrazione
•teorema di Pitagora
•teorema della bisettrice
•risolvere equazioni
•operare con i radicali (razionalizzazione)

Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

DEFINIZIONE DI SEZIONE AUREA

Si dice **sezione aurea** di un segmento la parte del segmento medio proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente

$$AB : AC = AC : CB$$

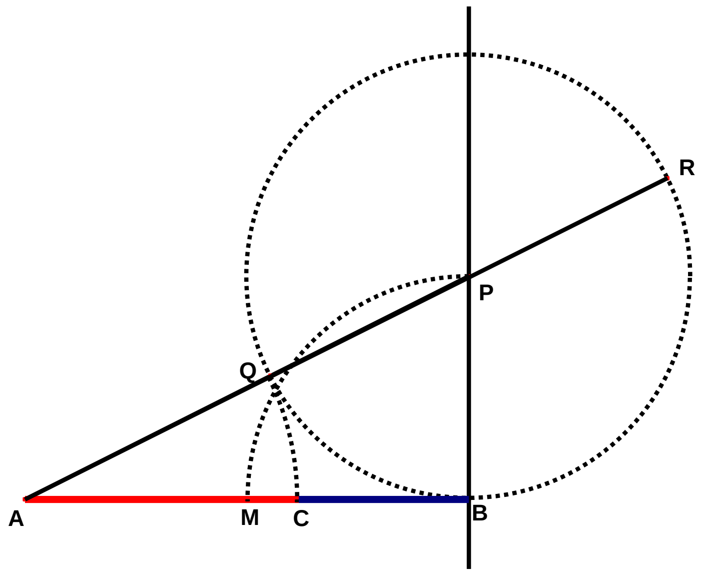


"Dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l'intero segmento e la parte rimanente sia equivalente al quadrato che ha per lato la parte maggiore" (*Proposizione 11 degli Elementi di Euclide*)

Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

COSTRUZIONE DELLA SEZIONE AUREA CON RIGA E COMPASSO
dal segmento alla sua sezione aurea

Conoscenze e abilità richieste per la costruzione geometrica
•determinare il punto medio di un segmento
•tracciare circonferenze di un dato centro e raggio
•trasportare un segmento
per la dimostrazione
•teorema della tangente e della secante
•operare con le proporzioni



Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

CALCOLO DEL NUMERO φ

Se il segmento AC è la sezione aurea del segmento AB allora:

AB : AC = AC : CB

Ponendo:

AB = **l**   AC = x   CB = **l** -

Conoscenze e abilità richieste:
- Operare con le proporzioni
- Operare con i radicali
- Risolvere equazioni di II grado

Si ottiene:

$$x = \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

φ **NUMERO AUREO**

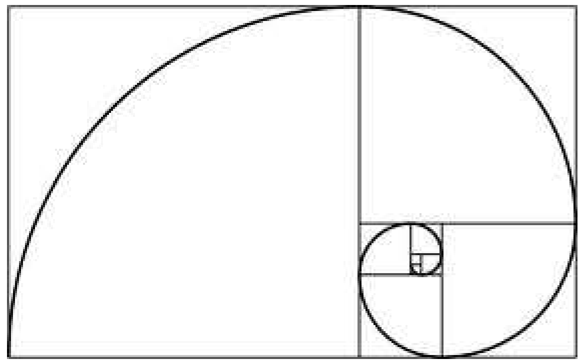
Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

FASE 3: approfondimenti

- La spirale logaritmica
- Altri esempi nell'arte e nella natura della sezione aurea
- L'irrazionalità di $\sqrt{5}$
- Il calcolo approssimato di $\sqrt{5}$ con un metodo numerico
- I lati del decagono e del pentagono regolari inscritti in una circonferenza
- I numeri di Fibonacci

Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

LA SPIRALE LOGARITMICA



Partiamo da un rettangolo aureo e costruiamo sul lato minore un quadrato interno al rettangolo. Quello che rimane è ancora un rettangolo aureo.

L’operazione può continuare all’infinito.

Tracciando in ogni quadrato un quarto di circonferenza, come indicato nella figura, otteniamo una spira logaritmica, nota come la “ d’oro”.

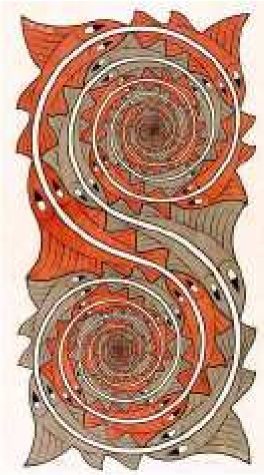
Conoscenze e abilità richieste:

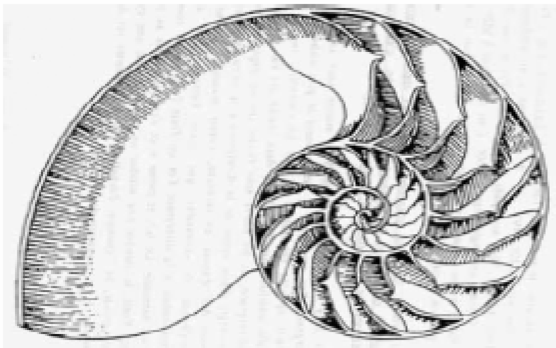
•Costruire figure geometriche (quadrati, rettangoli, circonferenze) con riga e compasso o con software di geometria dinamica

Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso

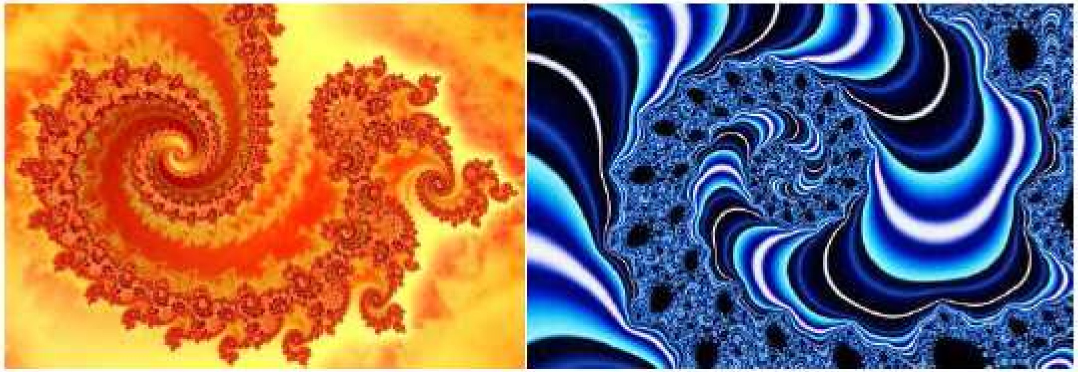
ESEMPI DI SPIRALI LOGARITMICHE

"Vortici"
di **M.C. Escher**
(1898-1972)



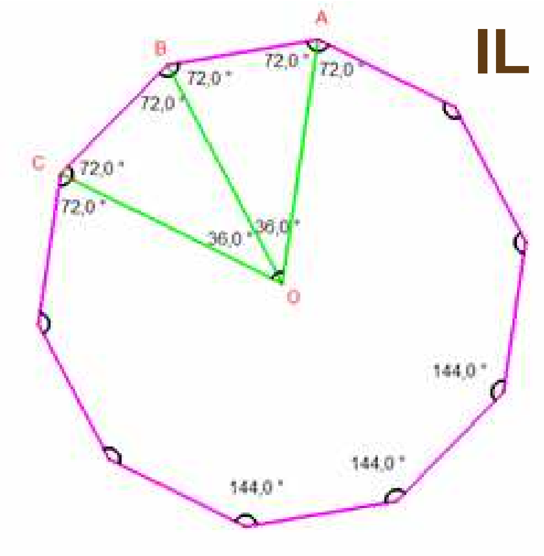


Esempi in natura:
il Nautilus



Esempi di frattali: la caratteristica che rende le spirali un frattale è l'autosomiglianza

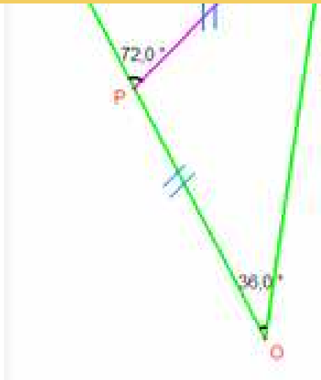
Costruire la sezione aurea di un segmento
Organizzazione del percorso



IL LATO DEL DODECAGONO REGOLARE

Il lato del dodecagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta

Conoscenze e abilità richieste
- Poligoni regolari inscritti in una circonferenza
- Similitudine tra triangoli



Dimostrazione

tracciata la bisettrice dell'angolo OAB, di ottiene il triangolo isoscele ABP con AB = AP.
Anche il triangolo AOP è isoscele avendo gli angoli in A e in B di 36°, per cui AP = OP. Si ha allora AB = AP = OP. Essendo i due triangoli isosceli simili, si ha:

OB : AB = AB : BP

Giornate matematiche

La matematica nel primo biennio

Costruzione delle prove di verifica

Costruire la sezione aurea di un segmento
Esempi di prove di verifica

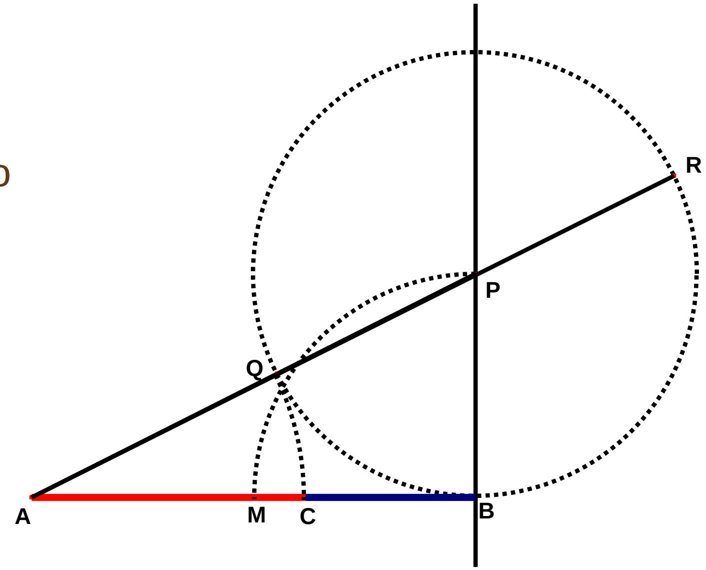
Le proposte sono elencate seguendo un ordine di difficoltà crescente:

- Costruzione geometrica della sezione aurea o del rettangolo aureo (ripetizione di costruzioni geometriche già viste)
- Dimostrazioni algebriche
- Dimostrazioni geometriche

Costruire la sezione aurea di un segmento
Esempi di prove di verifica

1. **Dato un segmento AB, individua la sequenza che permetta di costruire su AB un punto C tale che AC sia la sezione aurea di AB.** (*la sequenza fornita è quella corretta*).

   a. Costruisci il segmento AB
   b. Traccia il punto medio M di AB.
   c. Costruisci la retta r per B perpendicolare ad AB
   d. Traccia una circonferenza c_1 di centro B e raggio BM
   e. Indica con P il punto di intersezione di c_1 con r
   f. Traccia il segmento AP.
   g. Traccia la circonferenza c_2 di centro P e raggio PB
   h. Indica con Q il punto di intersezione tra AP e c_2
   i. Traccia la circonferenza c_3 di centro A e raggio AQ
   j. Indica con C il punto di intersezione tra AB e la circonferenza c_3

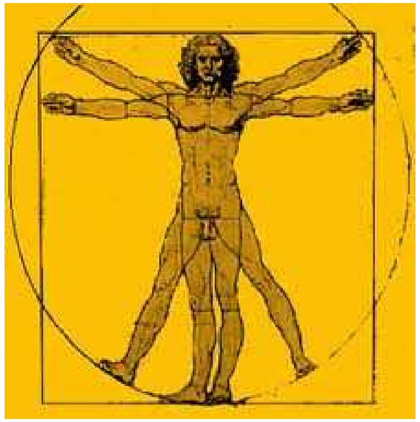


Costruire la sezione aurea di un segmento
Esempi di prove di verifica

2a. Costruisci con riga e compasso o con un software di geometria dinamica la sezione aurea di un segmento AB

2b. Descrivi con riferimento alla figura i passi svolti nella costruzione, indicando i riferimenti teorici che hai utilizzato.

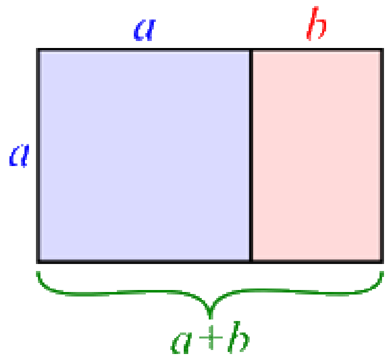
3. Riporta sul tuo foglio il rettangolo evidenziato nella seguente figura e stabilisci , mediante costruzione con riga e compasso o con software, se si tratta di un rettangolo aureo.



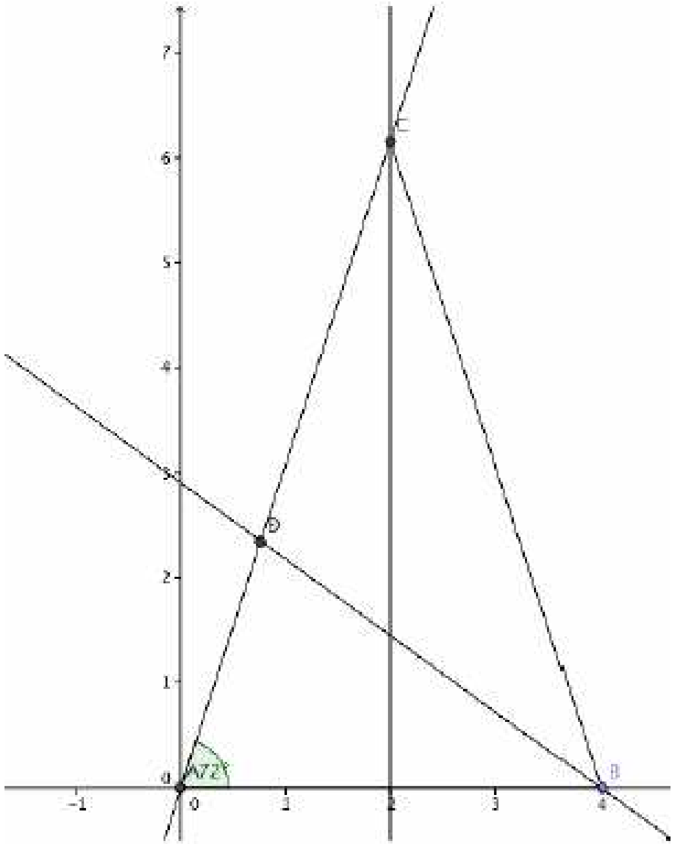
Costruire la sezione aurea di un segmento
Esempi di prove di verifica

4. Dato un decagono regolare il cui lato misura 4 cm, determina il raggio della circonferenza circoscritta e costruiscila con riga e compasso o un software di geometria dinamica.

5. Dato il rettangolo aureo, di base *a*+*b*, rappresentato in figura, dimostra algebricamente che anche il rettangolo di base b è ancora un rettangolo aureo.



Costruire la sezione aurea di un segmento
Esempi di prove di verifica



6. Dimostra che il segmento AB è la sezione aurea del segmento AC, ordinando la sequenza di passaggi (*la sequenza fornita è quella corretta*)

a. Costruisci il segmento AB
b. Costruisci l'angolo BAB' = 72°
c. Costruisci l'asse del segmento AB
d. Interseca la semiretta AB' con l'asse del segmento AB
e. Congiungi i punti C e B
f. Considera il triangolo ABC
g. Considera la bisettrice dell'angolo CBA
h. Indica con D il punto di intersezione della bisettrice con il lato AC

Giornate matematiche

12 - Le medie e la disuguaglianza

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

IMPOSTAZIONE

Il quesito si articola in due punti:

- una parte introduttiva sulle medie possibili; ogni problema ha una sua media, adeguata alla tipologia del problema esposto.
- una seconda parte sul confronto tra media geometrica e aritmetica.

Il quesito riguarda un concetto centrale della statistica (le medie) e di una proprietà che riguarda due esempi tipici di medie che permette un ponte tra l’algebra e la statistica.

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

PREREQUISITI

- Conoscenze
  - a carattere algebrico
    - calcolo algebrico
    - radicali quadratici
  - a carattere geometrico
    - proprietà dei triangoli inscritti in una circonferenza
    - teoremi di Euclide
- Abilità
  - operare con radicali
  - risolvere equazioni
  - riconoscere le principali proprietà delle figure geometriche

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

CONNESSIONE CON GLI ALTRI RISULTATI

5. Fattorizzare un trinomio di 2° grado

9. Costruire la sezione aurea di un segmento

11. La probabilità è un numero compreso tra 0 e 1

13. $\sqrt{a}$: approssimazione numerica e costruzione geometrica

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

COLLOCAZIONE NELLA PROGETTAZIONE DIDATTICA

Periodo – secondo anno, quando gli studenti sono in possesso di tutte le tecniche di calcolo algebrico di base

Competenza - analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Organizzazione del percorso

Il lavoro si articola in due punti:

- introduzione del concetto di media, dei vari tipi di media e delle loro proprietà tramite problem solving, partendo da semplici problemi di vita quotidiana vicini agli studenti (esempio unità m@t.abel “Di media non ce n’è una sola !” www.indire.it)
- Dimostrazione della disuguaglianza con approccio
  - algebrico
  - geometrico

VERIFICA ALGEBRICA DI $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

- **a e b sono positivi o negativi?**
  - Al primo membro compare una radice di indice pari, quindi il prodotto *ab* deve essere necessariamente non negativo.
  - Se i fattori fossero entrambi negativi, la disuguaglianza non sarebbe verificata
  - Pertanto l'unico caso da studiare è:

a≥0 e b≥0

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
Organizzazione del percorso

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

- Posta come condizione la positività dei due valori, è sufficiente elevare al quadrato e con semplici passaggi algebrici si arriva alla disuguaglianza

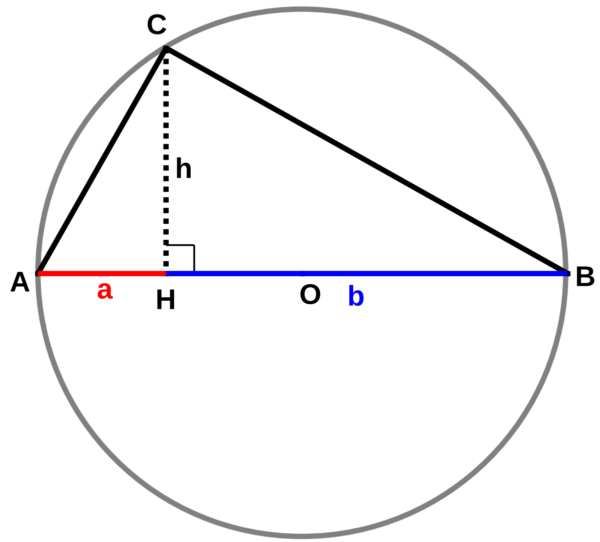
$$(a-b)^2 \geq 0$$

  che è verificata per ogni valore positivo o nullo di a e b.

- **OSSERVAZIONE** - L’uguaglianza vale se ***a = b***

VERIFICA GEOMETRICA DI $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

- Si riprendono le considerazioni fatte sulla positività di a e b.
- Se ne deduce che possono essere considerate le misure di due segmenti e, in particolare delle due proiezioni sull'ipotenusa dei cateti di un triangolo rettangolo che pensiamo inscritto in una circonferenza e quindi con l'ipotenusa coincidente con il diametro della circonferenza

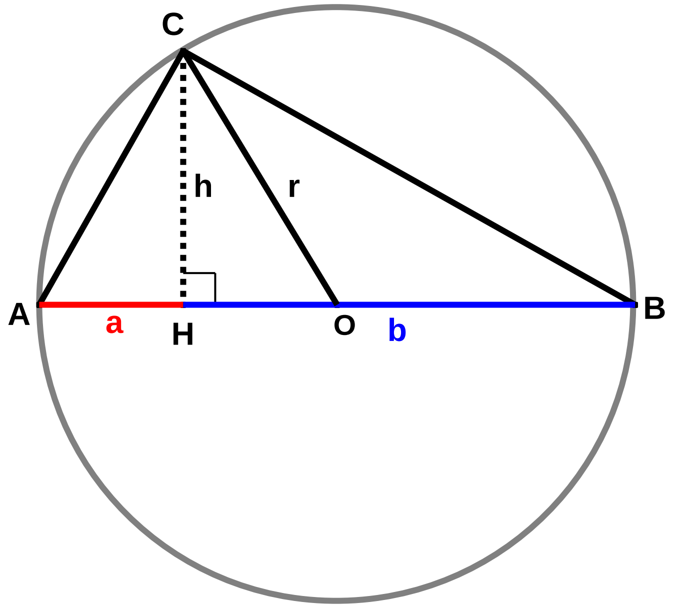


Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Organizzazione del percorso

L'ipotenusa coincide con il diametro della circonferenza, quindi

$$r = \frac{a+b}{2}$$



Per il teorema di Euclide l'altezza h è medio proporzionale tra le due proiezioni, quindi:

$$h^2 = ab \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{ab}$$

da cui, essendo h < r , si deduce la disuguaglianza

INTERPRETAZIONE STATISTICA

$\sqrt{ab}$ è la **media geometrica** dei due valori

$\frac{a+b}{2}$ è la **media aritmetica** dei due valori

Se ne deduce che:

la media geometrica tra due valori è sempre minore delle loro media aritmetica

Giornate matematiche

La matematica nel primo biennio

Costruzione delle prove di verifica

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Esempi di prove di verifica

Le proposte di prove articolate su livelli di competenze

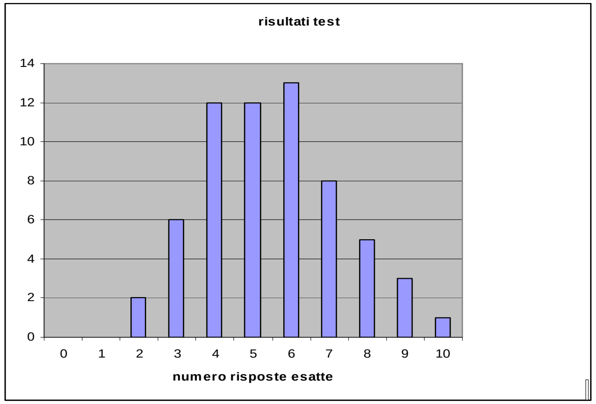
- **Livello base**: riconoscere e utilizzare le diverse medie
- **Livello intermedio**: individuare il modello di media più adeguato ad un determinato contesto problematico
- **Livello avanzato**: dimostrare

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Esempi di prove di verifica

LIVELLO BASE

Tutti gli studenti che frequentano il terzo anno di una scuola media sono stati sottoposti ad un test di matematica costituito da 10 quesiti.
I risultati del test sono riportati in figura.



Determinare:

a) il numero degli studenti sottoposti al test;
b) la moda della distribuzione;
c) la mediana della distribuzione;
d) il valor medio delle risposte esatte.

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Esempi di prove di verifica

LIVELLO INTERMEDIO

Uno studente universitario iscritto al corso di laurea in Matematica ha superato durante il primo anno i seguenti esami riportando le seguenti votazioni:

esame	Punteggio	crediti
Laboratorio di Matematica	25	9
Analisi Matematica	24	12
Geometria	21	6
Algebra	27	6
Calcolo delle probabilità	23	9
Fisica generale	24	9
Lingua inglese	30	3
Fondamenti di Informatica	28	3
Abilità relazionali	30	3

Lo studente accede ad una borsa di studio se ha conseguito una media superiore a 27/30. Otterrà il nostro studente la borsa di studio?

Le medie e la disuguaglianza $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
Esempi di prove di verifica

LIVELLO AVANZATO

Un rettangolo ha dimensioni *a*, *b*. La sua area è equivalente a quella di un quadrato. Confronta il semiperimetro del rettangolo con il doppio del lato del quadrato:

- Quando è maggiore?
- Quando è uguale?
- Quando è minore?

Interpreta i risultati ottenuti in termini di confronto tra medie.

Giornate matematiche

grazie per l’attenzione

Donatella Martini - IT “N.Baldini Ravenna