Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna

EM.MA. MATEMATICA

Dall'Emergenza Matematica
all'autovalutazione per il miglioramento

a cura di Anna Maria Benini e Aurelia Orlandoni

tecnodid
EDITRICE

Collana "I Quaderni dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna"
Quaderno n. 37, ottobre 2016.

Comitato tecnico-scientifico del progetto: Giancarlo Cerini (responsabile), Anna Maria Benini, (referente scientifico), Domenico Altamura, Rossella Garuti, Grazia Grassi, Claudio Massa, Aurelia Orlandoni, Maria Giovanna Papoff.

Contributi di: Domenico Altamura, Anna Maria Benini, Paolo Boero, Giorgio Bolondi, Ferran Ferrer, Rossella Garuti, Grazia Grassi, Francesca Martignone, Claudio Massa, Aurelia Orlandoni, Domingo Paola, Ornella Robutti, Stefano Versari, Rosetta Zan.

Editing: Maria Teresa Bertani

Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna
via de' Castagnoli, 1 - 40126 Bologna – Tel. 051 3785 1
E-mail: *direzione-emiliaromagna@istruzione.it;* sito web: *www.istruzioneer.it*
Direttore Generale: Stefano Versari
Dirigente Ufficio III: Chiara Brescianini

Piazza Carlo III, 42 - 80137 Napoli
tel 081.441922 fax 081.210893 www.notiziedellascuola.it

ISBN: 978-88-6707-015-2

Edizione: ottobre 2016

Stampa: Microprint (Napoli)

Indice

Prefazione

Introduzione

Parte I – Il progetto EM.MA.: caratteristiche e premesse culturali

Parte II – La ricerca azione dei docenti nei diversi ambiti della matematica

Postfazione

Appendice

Prefazione

LA NATURA È UN LIBRO SCRITTO IN CARATTERI MATEMATICI

Stefano Versari[1]

Questa pubblicazione presenta alcuni degli esiti di un percorso di azioni formative e di ricerca che hanno impegnato le scuole dell'Emilia-Romagna nel quinquennio 2008-2013 attorno alla grande questione dell'insegnamento-apprendimento della Matematica. Il percorso formativo è stato denominato EM.MA., acronimo di Emergenza Matematica, in relazione a una diffusa preoccupazione circa i livelli di apprendimento della matematica nel nostro Paese. Il nome Emma rimanda pure a Emma Castelnuovo, uno dei grandi 'saggi' della didattica della Matematica in Italia, a ricordarci che non si esce dalle emergenze se non si rinnova a fondo l'insegnamento della Matematica, superando la routine dei formalismi fine a se stessi e inserendolo a pieno titolo nella formazione della persona[2].

Perché Emergenza Matematica?

Le rilevazioni sui livelli di apprendimento dei quindicenni (Ocse-Pisa 2003, 2006), i dati provenienti dalle indagini dell'Invalsi (dalla primaria alla secondaria), gli esiti della 'quarta prova' nazionale nell'esame di licenza media, i risultati di indagini svolte a livello regionale sugli esiti degli scrutini attestano concordemente criticità nelle competenze degli allievi della nostra scuola nel campo degli apprendimenti matematici.

In particolare l'indagine Ocse-Pisa 2006 mostra limiti nell'ambito delle competenze matematiche dei quindicenni della nostra macro-area di appartenenza, il Nord-Est. Nell'indagine del 2003 il Nord-Est aveva ottenuto in Matematica punteggi superiori al-

---

[1] Stefano Versari è Direttore Generale dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna. Il titolo del contributo è ricavato da una frase di Galileo Galilei riformulata da R. Santorini, A. Fazzini, A. Castellini, *Insegnare matematica... a teatro*, in A. Peruzzi (a cura di), *Pianeta Galileo 2010*, Consiglio Regionale della Toscana, Firenze 2011.

[2] *Una matematica per il cittadino* propone la decennale linea di ricerca dell'UMI, Unione Matematica Italiana, Commissione Italiana per l'Insegnamento della matematica. Numeroso materiale didattico è rinvenibile all'indirizzo *http://www.umi-ciim.it/*.

la media Ocse: punteggio Nord-Est del 2003 pari a 510 (media Ocse 500), mentre l'indagine del 2006 evidenzia un punteggio di 487 per il Nord-Est (media Ocse 500). A fronte di questi e altri dati non entusiasmanti, quali i risultati degli scrutini, questo Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna nel 2008 ha deciso di affrontare la situazione con specifiche misure di accompagnamento per sensibilizzare il personale docente. Il problema richiedeva il coinvolgimento, in una prospettiva di continuità educativa, di tutti gli insegnanti ai vari livelli impegnati nello sviluppo del curricolo matematico e nella promozione di competenze matematiche.

Il modello organizzativo del progetto EM.MA.

Una delle principali caratteristiche del progetto EM.MA. è rappresentata dalla sua struttura organizzativa che ha visto coinvolti attori diversi: l'USR ER, nelle sue articolazioni Direzione Generale, Uffici territoriali, reti di scuole, collegi docenti, dipartimenti disciplinari. Senza questa struttura organizzativa, a volte scherzosamente definita dai partecipanti 'prussiana', non sarebbe stato possibile coinvolgere diffusamente le singole scuole e i singoli docenti. Quali i compiti reciproci?

- La Direzione Generale dell'USR, con i suoi ispettori, ha costituito un comitato tecnico-scientifico per la guida del percorso ed è stata presente ai seminari provinciali, sostenendo istituzionalmente il progetto di formazione e di ricerca-azione.
- Gli Uffici di ambito territoriale dell'USR ER, attraverso i referenti per l'autonomia, hanno costituito l'ossatura del progetto, mantenendo i collegamenti con le scuole per diffondere le iniziative che via via si venivano ad attuare nelle diverse province e raccogliendo nei siti istituzionali i materiali del progetto, che sono tuttora, a distanza di anni, utilizzati da molti insegnanti[3].
- I docenti tutor senior, formati all'interno di questo progetto, hanno rappresentato una ricchezza di competenze radicata nel territorio: molti di loro sono tuttora un punto di riferimento per l'insegnamento-apprendimento della matematica; diversi partecipano come autori di prove Invalsi alle attività del Servizio Nazionale di Valutazione o alla diffusione della cultura della valutazione.
- I docenti tutor junior hanno promosso nelle loro scuole le attività di ricerca-azione che il progetto andava proponendo e hanno implementato l'analisi dei dati Invalsi in un'ottica di miglioramento della didattica della matematica.

Il successo di questo modello organizzativo è stato di ordini diversi. La diffusione capillare sul territorio di attività di ricerca-azione, di cui solo in piccola parte questa pubblicazione rende conto. La cooperazione fra i diversi soggetti coinvolti nel progetto, che ha consentito il coinvolgimento di una larga maggioranza dei docenti di matematica della nostra regione. Infine, ma non ultima, la sperimentazione su larga scala

[3] Materiali del progetto EM.MA. sono fra gli altri in: *http://www.bo.istruzioneer.it/emma/*; *http://archivio.istruzioneer.it*.

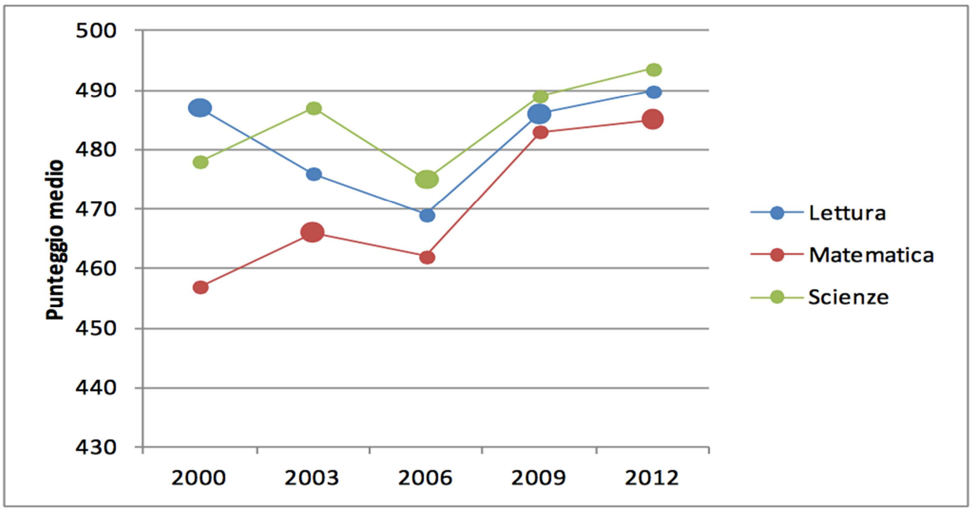
del valore formativo della valutazione, non intesa come strumento per redigere una 'graduatoria' fra scuole ma come strumento per riflettere sui nodi didattici nell'insegnamento-apprendimento della matematica. Dunque, oltre che ai risultati, l'attenzione si è rivolta alle prove come occasione di riflessione sulle strategie didattiche da adottare per un miglioramento degli apprendimenti.

Il successo di questo progetto sia come modello organizzativo sia per i risultati ottenuti, primo fra tutti il coinvolgimento diretto di tanti docenti, ha fatto sì che a esso si ispirassero progetti territoriali simili (ad esempio in Liguria) e anche iniziative nazionali di informazione e sensibilizzazione sulle rilevazioni nazionali e internazionali.

Uno sguardo ai risultati in Matematica di oggi

Nel dicembre del 2013 sono stati diffusi dal Consorzio internazionale della ricerca Ocse-Pisa i risultati dell'indagine Pisa 2012 che aveva come *focus* principale proprio la competenza matematica dei quindicenni. Si è osservato un netto miglioramento rispetto ai risultati del 2003. Di seguito il quadro degli andamenti delle competenze nelle diverse rilevazioni[4].

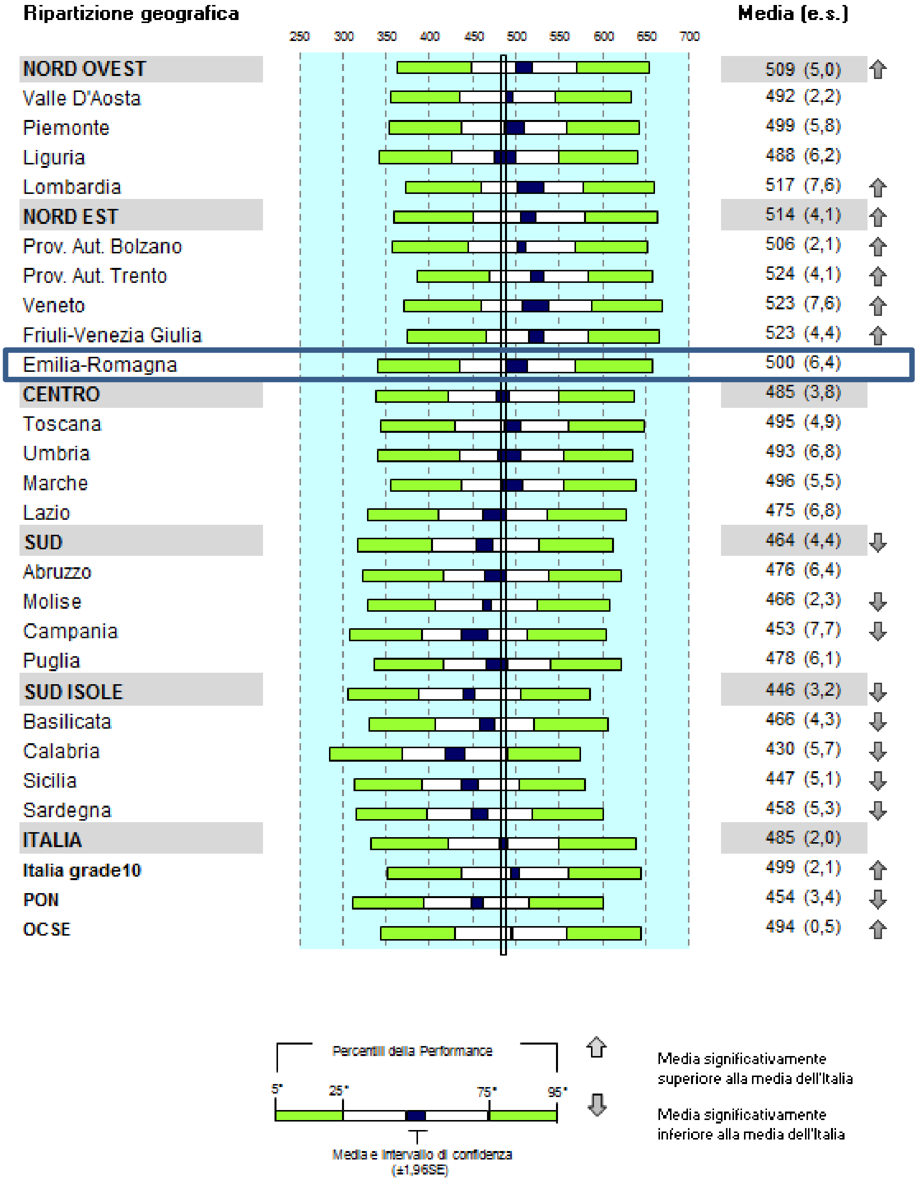
Figura 1 – Risultati in Lettura, Matematica e Scienze, nelle rilevazioni Pisa 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, in Italia



[4] *http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012.php?page=pisa2012_it_07.*

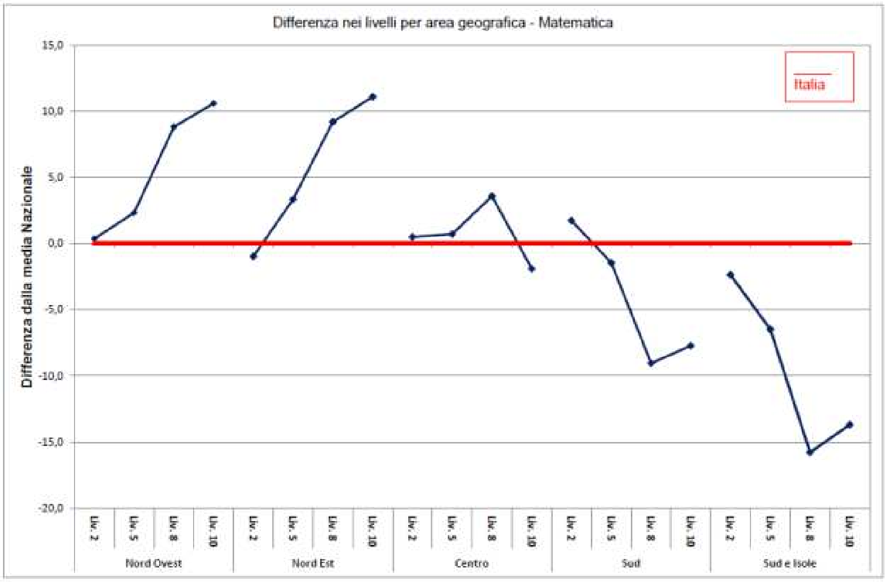
Particolarmente interessante è il risultato dell'Emilia-Romagna, che ha esiti superiori alla media Ocse-Pisa (494); si veda la figura 2.

Figura 2 – Risultati della rilevazione Ocse-Pisa in matematica. Anno 2012



Se poi prendiamo in considerazione i risultati Invalsi del 2014 in Matematica, osserviamo che nella nostra macro-area di appartenenza (Nord-Est) l'evoluzione dei risultati dalla scuola primaria (II primaria, livello 02) alla secondaria di II grado (Livello 10) mostra un aumento positivo della differenza rispetto alla media nazionale. Come dire che in Emilia-Romagna, così come nelle altre regioni del Nord-Est e del Nord-Ovest, '*andare a scuola fa bene*'.

Figura 3 - Risultati in Matematica, espressi in termini di distanze dalla media nazionale[5].



Un ulteriore elemento che emerge dall'indagine Ocse-Pisa 2012 - confermato, per la nostra regione, anche dalle prove Invalsi – è rappresentato dai buoni risultati degli istituti tecnici, del tutto comparabili ai risultati dei licei, come anche dai risultati degli alunni con *background* migratorio (di I e II generazione) alla fine del primo ciclo di istruzione. Aree di criticità permangono nell'istruzione professionale, segno che questa componente del nostro sistema di istruzione richiede attenzioni maggiori.

I dati delle rilevazioni standardizzate nazionali e internazionali mostrano un sistema in crescita per quanto riguarda gli apprendimenti matematici; questo però non basta, occorre fare ancora di più coinvolgendo diffusamente docenti, studenti e famiglie che sono i diretti interessati al miglioramento del sistema educativo di istruzione e formazione.

[5] *http://www.invalsi.it/areaprove/rapporti/Rapporto_SNV_PN_2014_10.pdf.*

EM.MA. e RAV: uno stretto rapporto

L'esperienza del progetto EM.MA. (ma anche quella del 'progetto fratello' ELLE riguardante la comprensione in lettura) e l'uso delle prove standardizzate per individuare aree di criticità, nodi concettuali, ostacoli nell'insegnamento-apprendimento della matematica, costituiscono una buona base di partenza per la realizzazione di un piano di miglioramento per le scuole della regione, ovvero per la costruzione di un Rapporto di Autovalutazione (RAV)[6]. Il RAV infatti richiede una cultura della valutazione che integra miglioramento (*improvement*) e rendicontazione (*accountability*), che è il binomio sviluppato con il progetto EM.MA..

Una domanda in conclusione si impone: quale il metodo adottato dai docenti che hanno partecipato a EM.MA. per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento? Una breve e istruttiva storia ci viene incontro aiutandoci a sintetizzare il metodo utilizzato:

> *Raccontano che una volta venne da un'Accademia bandito un premio a chi avesse saputo trovar le ragioni, per le quali un pesce morto pesa più di un pesce vivo. Naturalmente per un'indagine, che supponeva la conoscenza de' più riposti secreti della natura, il premio non era piccolo, e riuscì straordinario il numero di coloro, che con lunghi ragionamenti, movendo da principii ineccepibili e traendone logicamente le più lontane conseguenze, dimostrarono fino all'evidenza le cause di questo fenomeno. Chi si appigliò all'anima o agli spiriti vitali che, come farebbe una vescichetta entro un corpo immerso nell'acqua, alleggeriscono la materia, chi al moto che, per via dell'attrito coll'atmosfera, fa nascere similmente una certa sospensione, chi insomma a un perché, chi a un altro, secondo la filosofia che professava circa le cose naturali. Uno solo, un uomo, si capisce, un po' grossolano e di poca fede, prima di cominciare a infilar sillogismi, s'avvisò di mettere sulla bilancia un pesce vivo, poi, avendolo ucciso, ve lo rimise morto, e trovò che vivo e morto pesava egualmente*[7].

Come nel racconto "*l'uomo di poca fede*", i docenti che hanno partecipato al progetto EM.MA., che in queste pagine si documenta, non sono stati a disquisire sulla validità o meno delle prove standardizzate di matematica. Le hanno '*pesate*', nel senso che le hanno studiate, modificate, criticate, ne hanno fatto uno strumento di lavoro, ricerca e riflessione sulle loro pratiche didattiche. Si tratta di un intelligente metodo critico di cui ci si augura la più ampia diffusione, non solo nella didattica[8].

---

[6] Con la Direttiva del 18 settembre 2014 tutte le scuole statali e paritarie sono chiamate a redigere, entro il 2015, un rapporto di autovalutazione. Il quadro normativo per l'avvio del Sistema nazionale di valutazione (Decreto 80/2013, Direttiva 11/2014, C.m. 14/2014) si è ormai completato.

[7] Aristide Gabelli (pedagogista italiano, 1830-1891), *Il Metodo di insegnamento nelle scuole elementari d'Italia,* 1880 (più volte ristampato).

[8] Determinante per la stesura del presente intervento è stato il supporto competente della dirigente scolastica Rossella Garuti, esperta di sistemi di valutazione della matematica, cui va il ringraziamento dell'autore.

Introduzione

EM.MA.: una ricerca regionale sulla didattica della matematica

Domenico Altamura, Anna Maria Benini, Giancarlo Cerini, Rossella Garuti, Grazia Grassi, Claudio Massa, Aurelia Orlandoni, Maria G. Papoff[1]

Il percorso di ricerca-formazione EM.MA., qui sinteticamente presentato, nonostante il suo nome evocativo non è una risposta dell'ultimo momento a sollecitazioni attuali o un omaggio occasionale; al contrario, si è snodato nel tempo con sistematicità e coerenza, coinvolgendo la maggioranza dei docenti del I ciclo e molti del II in un'attività di autoformazione sapientemente guidata e sostenuta da autorevoli basi teoriche e da sperimentazioni consolidate e documentate.

Questo volume vuole essere innanzitutto un ringraziamento e una doverosa restituzione a tutti gli insegnanti che si sono messi in gioco per arricchire la loro professionalità facendosi coinvolgere in attività laboratoriali e di riflessione.

Nello stesso tempo vuol essere la proposta di un modello formativo concretamente realizzabile ed efficace, che si ritiene possa essere un esempio metodologico tuttora valido, facilmente ripetibile e coniugabile anche con le più recenti esperienze e proposte della didattica[2].

Non trascurabile, fra i risultati raggiunti, è anche l'aspetto motivazionale. I docenti non si sono sentiti bersaglio di 'prediche' o di richiami provenienti da chi non conosce appieno o non riconosce le difficoltà del loro lavoro quotidiano, ma sono stati sollecitati a esprimere apertamente le problematicità incontrate nel loro percorso professionale, cercando nello stesso tempo strumenti e modalità per affrontarle e ridurle. Ne è sorta una rinnovata fiducia in se stessi e nella formazione.

Come noto, il punto di partenza del progetto è stata nel 2008, la consapevolezza delle diffuse criticità negli apprendimenti matematici degli alunni della nostra scuola, sulla base di rilevazioni sia interne sia esterne. L'ampia presenza di 'debiti formativi' in matematica (scuola secondaria di II grado) trova corrispondenza in una consistente area di insufficienza riscontrata nella 'scuola media' (oltre il 20%), unita a prestazioni generalmente non brillanti (32% giudicati 'sufficienti'). Questa situazione, che si river-

[1] Comitato tecnico-scientifico del progetto EM.MA..

[2] Le esemplificazioni e i dati più attuali non sono stati qui riportati, nel rispetto delle attività realmente svolte.

bera negativamente sulle possibilità di successo formativo per i nostri allievi, è stata affrontata attraverso una presa di coscienza generalizzata del problema, con l'adozione di specifiche misure di sensibilizzazione del personale docente interessato e di coerenti strategie didattiche, metodologiche e di valutazione.

Il problema ha richiesto il coinvolgimento del maggior numero possibile di insegnanti impegnati nello sviluppo del curricolo matematico in una prospettiva di continuità verticale a partire dalla scuola primaria (anzi, ancor prima, nella scuola dell'infanzia) e lungo tutto il percorso scolastico. Questa consapevolezza trapela anche dalle Indicazioni per il curricolo del primo ciclo (testi del 2007 e del 2012) e dalle più recenti innovazioni proposte per la scuola secondaria di II grado (dalle Linee per l'obbligo del 2007 fino alle novità dell'ordinamento del 2010). Le azioni proposte attraverso il progetto EM.MA., che si sono poi intrecciate con altre iniziative promosse dall'Amministrazione, come i progetti M@t.abel e PQM (Progetto Qualità Merito), hanno consentito di portare all'attenzione di centinaia (anzi, alcune migliaia) di insegnanti i 'nodi' culturali e didattici implicati nell'insegnamento di questa disciplina, a partire dall'analisi critica delle prove di verifica degli apprendimenti.

Negli ultimi anni si è accentuata l'attenzione del nostro Paese nei confronti dei risultati scolastici, che ora costituiscono il nucleo centrale di esplorazioni della qualità della scuola (RAV); ciò anche a seguito dell'irrobustirsi di un sistema di valutazione in grado di fornire informazioni sistematiche sui livelli di apprendimento (in alcune competenze fondamentali come quelle linguistiche e matematiche), sulle variabili che possono condizionarli, sui differenziali tra territori, scuole, classi. Tuttavia gli strumenti di valutazione (test, dati, prove), se non sostenuti da una consapevole cultura della valutazione, rischiano di fornire informazioni superficiali non utilizzabili per analizzare la situazione e adottare le necessarie strategie di miglioramento.

Occorre salvaguardare il valore formativo della valutazione, che significa 'fare ricerca' sulla valutazione. Il progetto EM.MA. e quelli a essa connessi hanno messo al centro delle attività le prove di valutazione, intese come materiale di studio per capire di più la disciplina matematica, i suoi nuclei fondanti, il suo linguaggio, le sue procedure, i processi cognitivi implicati e le scelte didattiche coerenti con una matematica più argomentativa e meno assiomatica.

In particolare il progetto "EM.MA. - Emergenza matematica" ha previsto il coinvolgimento di:

- formatori-tutor senior di matematica a livello regionale (articolati in piccoli staff provinciali, per sostenere l'insieme delle iniziative e offrire una base di riferimento);

- l'individuazione in *ogni istituzione scolastica* di docenti-tutor junior che, opportunamente formati attraverso incontri provinciali, sono stati incaricati – d'intesa con il rispettivo dirigente scolastico – di programmare e realizzare alcuni 'eventi' di sensibilizzazione sulla didattica della matematica all'interno del proprio istituto;

- l'organizzazione a livello di *ogni provincia* di seminari di approfondimento per i docenti-tutor junior (di carattere provinciale o per reti di scuole) per il 'montaggio' delle azioni da sviluppare all'interno delle scuole.

L'obiettivo delle diverse iniziative (regionali, provinciali, di rete, di scuola) è stato quello di riflettere sulle difficoltà di apprendimento in matematica che si riscontrano fin dagli ultimi anni del primo ciclo, a partire dall'analisi delle prove di valutazione (prove Invalsi, altri strumenti di rilevazione), dal rapporto tra quadri concettuali sottesi alle prove e metodi di insegnamento, dalla messa in comune di efficaci proposte didattiche scaturite dalle migliori pratiche.

Il progetto, dunque, ha consentito di intercettare bisogni immediati dei docenti (come affrontare in modo intelligente le scadenze valutative, il sistema degli esami, i test, senza farsi travolgere dall'ansia di prestazione) proiettandoli in un quadro di ricerca didattica, di confronto sui metodi di insegnamento, di raccordo tra professionalità diverse, di elaborazione di prime ipotesi di curricolo verticale.

I materiali ripercorrono a grandi linee la successione e il 'senso' delle attività sviluppate in questi anni e offrono primi esempi di ipotesi di lavoro elaborate nel corso dei seminari provinciali e delle attività delle scuole, sintetizzando l'insieme delle azioni, delle premesse culturali, delle fonti scientifiche di riferimento e degli esiti dei percorsi di ricerca.

Si può sicuramente affermare che il progetto "Emergenza matematica" ha contribuito al miglioramento dei livelli di apprendimento e di insegnamento della matematica nelle scuole della nostra regione (a partire dagli ultimi anni del primo ciclo di istruzione). La sua capillare articolazione sul territorio, unitamente ad altre azioni (formazione sulle Indicazioni per il curricolo, azioni per l'obbligo di istruzione, progetto M@tabel, progetto Qualità e Merito) con cui si è via via incontrato (mantenendo però una sua specifica autonomia), ha rappresentato, in una fase non facile di evoluzione e transizione del sistema scolastico italiano, un utile e condiviso punto di riferimento per assicurare continuità nell'azione di ricerca, studio, formazione delle scuole autonome.

Si riconferma, anche ripercorrendo le pagine della pubblicazione, che la scuola è ricca di professionalità, di spunti innovativi, di buone pratiche, che meritano di essere conosciute, valorizzate, diffuse a una più ampia cerchia di fruitori per essere di stimolo al miglioramento di tutto il sistema formativo.

Parte I
Il progetto EM.MA.: caratteristiche e premesse culturali

IL PROGETTO EM.MA.: NOTE ORGANIZZATIVE E DI METODO

Domenico Altamura, Claudio Massa

Ormai da molti anni nella scuola italiana sono stati introdotti alcuni strumenti di valutazione delle competenze che permettono di confrontare i nostri studenti con quelli di altri Paesi. Le varie prove Invalsi, i test Ocse-Pisa e altri ancora hanno messo la nostra scuola a contatto con modalità di insegnamento/apprendimento diverse e questo fatto, di per sé, ha innescato un significativo interesse degli insegnanti verso un possibile aggiornamento delle proprie metodologie didattiche. Infatti, i risultati deludenti che i nostri studenti, spesso, ottengono in queste prove non sono sempre coerenti con il grado di preparazione che gli stessi studenti, a detta dei loro insegnanti, hanno raggiunto. Evidentemente vengono misurate cose diverse.

Partendo da questa considerazione e cercando di comprendere le ragioni delle palesi criticità degli studenti italiani rispetto alle prove sia nazionali che internazionali si è formato, presso l'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna, un gruppo di studio con l'intento di proporre una serie di attività che facessero emergere la qualità dell'insegnamento, che pur ci doveva essere, visti i risultati dei nostri studenti che frequentano corsi all'estero.

Dall'analisi degli esiti delle varie prove risulta evidente una certa sofferenza dei nostri alunni nel campo degli apprendimenti matematici, spesso ancorati più al 'sapere' che al 'saper fare'. Ciò emerge chiaramente osservando il fatto che anche gli studenti considerati 'bravi' si trovano spesso disorientati rispetto ad alcune tipologie di prove.

La domanda che si è posto il gruppo di studio è stata: "*Come fare a coinvolgere il maggior numero di docenti in una rivisitazione delle proprie metodologie al fine di creare le basi per una didattica orientata anche al 'saper fare', oltre che al 'sapere'?*"

È nato così il Progetto EM.MA. (EMergenza MAtematica).

Il progetto ha inteso favorire una presa di coscienza generalizzata del problema, con la ricerca di specifiche misure di sensibilizzazione del personale docente interessato e con l'adozione di coerenti strategie didattiche (rinnovamento dei metodi di insegnamento, analisi delle modalità di valutazione, eventuali iniziative di recupero, messa a punto di curricoli disciplinari coordinati, ecc.) a partire dal coinvolgimento di *tutti* i docenti che insegnano matematica nelle ultime due classi (4^a e 5^a) della *scuola primaria* e nelle tre classi della *scuola secondario di I grado*, per raggiungere poi anche i docenti della scuola secondaria di II grado.

Struttura organizzativa del progetto e sedi decisionali

Per svolgere le attività previste dal progetto si è costruita una struttura così organizzata. A *livello regionale* (USR) è stato costituito:

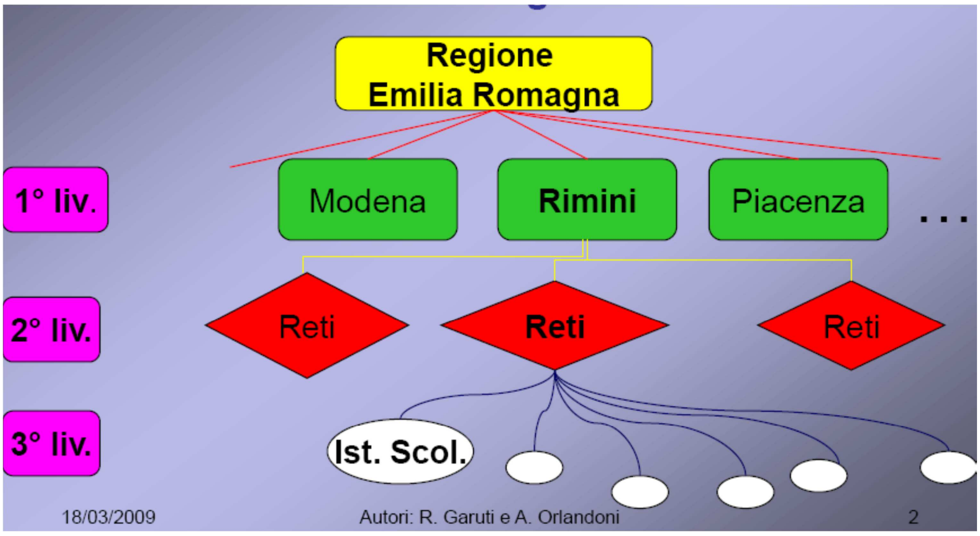
- uno staff di progetto (comitato tecnico scientifico di pilotaggio) con la responsabilità della supervisione complessiva del progetto sotto il profilo scientifico e organizzativo. Il gruppo di pilotaggio si è fatto carico in particolare dell'organizzazione degli eventi a livello regionale e di fornire supporto e linee di indirizzo ai gruppi provinciali;

- un gruppo di *30 formatori-tutor senior* di matematica, supportati da esperti esterni di alto livello, con il compito di sostenere l'insieme delle iniziative; essi hanno agito all'interno di presidi matematici provinciali;

A *livello provinciale* (UST) è stato attivato un presidio matematico in ogni provincia (in linea di massima coincidente con l'istituto scolastico a suo tempo individuato quale scuola sede presidio *M@t.abel*) con il compito di dare impulso alle azioni territoriali, attraverso la costituzione di uno staff composto da un referente UST, da formatori tutor-senior e dai tutor *M@t.abel*.

Compito del presidio provinciale era anche quello di organizzare seminari provinciali di inizio e fine delle attività annuali e di assicurare la gestione degli interventi, svolgendo funzioni di tutorato nei confronti dei tutor junior e partecipando alla programmazione delle iniziative locali.

Figura 1 – Struttura organizzativa territoriale



A *livello sub-provinciale* è stata strutturata (o confermata) un'articolazione in rete delle scuole del I ciclo (primarie e secondarie di I grado), al fine di programmare iniziative seminariali sub-provinciali (due per ogni rete), in raccordo con le iniziative formative per le *Indicazioni/2007*.

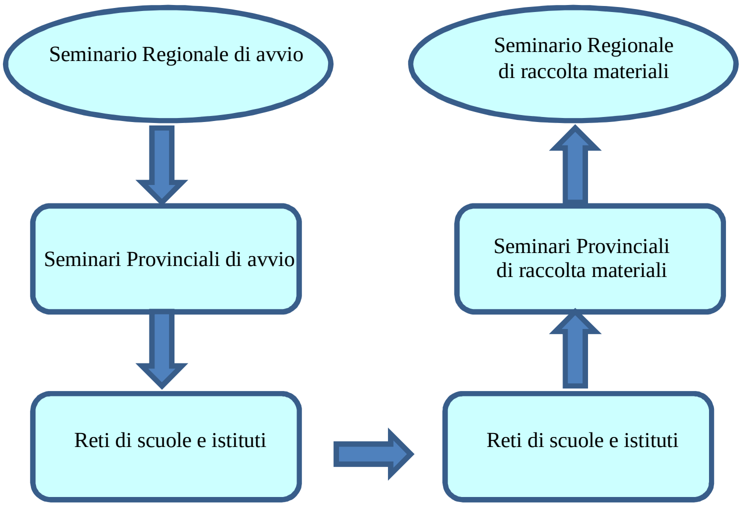
A *livello di singola scuola* è stato individuato un piccolo staff (docenti-tutor junior). Ogni staff è stato composto da due docenti per la scuola primaria, di classe 4ª o 5ª, e da due per la scuola secondaria di I grado (3 in tutto in caso di istituto comprensivo). Questi docenti, opportunamente formati, hanno partecipato ai seminari provinciali e sub-provinciali e 'animato' poi, all'interno dell'istituto di appartenenza, alcune situazioni di informazione, sensibilizzazione e ricerca, d'intesa con il dirigente scolastico.

I due schemi successivi mostrano il flusso delle attività e il planning del progetto.

Tabella 1 - Schema-planning del progetto emergenza matematica

Livello e responsabilità	*Cosa si fa*	*Chi partecipa*	*Quando*
Regionale USR: Staff di progetto	Due seminari regionali con la partecipazione di esperti nel settore	Docenti-tutor senior Responsabili UST Tutor M@t.abel	Inizio e fine anno scolastico
Staff provinciale: referente UST, tutor senior, tutor *M@t.abel*	Due seminari in ogni provincia con la partecipazione di un membro dello staff regionale	Docenti-tutor junior, uno di scuola primaria e due di scuola secondaria di I grado per scuola o tre per I.C.	Periodo intermedio dell'anno scolastico
Sub provinciale (reti di scuole) tutor senior	Due seminari-laboratori per ogni rete per predisporre le azioni nelle scuole	Docenti-tutor junior; uno di scuola primaria e due di scuola secondaria di I grado per scuola o tre per I.C.	Periodo intermedio dell'anno scolastico
Istituzioni scolastiche Staff di scuola (tutor junior d'intesa con dirigente scolastico)	Due incontri in ogni scuola (o abbinamento di scuole se non sono Istituti comprensivi)	Tutti i docenti di matematica (delle scuole primarie e secondarie di I grado coinvolte)	Periodo intermedio dell'anno scolastico

Figura 2 – Flusso delle attività



EM.MA. 1 - Anno scolastico 2008-09: sensibilizzazione e formazione

Le attività sono state avviate da un seminario regionale che ha avuto il compito di sensibilizzare i docenti invitati verso i temi fondamentali che emergono dalle Indicazioni nazionali.

In ogni provincia sono stati realizzati quattro seminari di sensibilizzazione/formazione per i docenti-tutor junior (due di carattere provinciale, uno di avvio e uno di raccolta dei materiali prodotti e due a livello di reti di scuole, uno di avvio e uno di raccolta dei materiali) per il 'montaggio' delle azioni da sviluppare all'interno delle scuole.

Tali incontri sono stati dedicati soprattutto alla rivisitazione critica di alcuni item delle prove Invalsi o Pisa, che potessero fungere da volano per ricostruire alcuni percorsi didattici orientati allo sviluppo di competenze.

In ogni istituzione scolastica i tutor junior sono stati incaricati – d'intesa con il rispettivo dirigente scolastico – di programmare e realizzare almeno due 'eventi' di sensibilizzazione sulla didattica della matematica. Alla fine del percorso si è tenuto un ultimo seminario regionale, per raccogliere e discutere i materiali prodotti.

L'obiettivo delle diverse iniziative (regionali, provinciali, di rete, di scuola) è stato quello di riflettere sulle difficoltà di apprendimento in matematica che si riscontrano fin dagli ultimi anni del I ciclo, a partire dall'analisi delle prove di valutazione internazionale (Pisa, TIMMS) e nazionale (4ª prova esame di licenza media, prove Invalsi, altri strumenti di rilevazione) e dal rapporto tra quadri concettuali sottesi alle prove e metodi di insegnamento, anche alla luce delle Indicazioni per il curricolo.

EM.MA. 2 - Anni scolastici 2009-10 e 2010-11: argomentare e rappresentare

Il progetto EM.MA. 2 ha posto il focus su due processi particolari: Argomentare e Rappresentare. È sembrato necessario, infatti, alla luce dei risultati delle prove (Invalsi, ma anche tutte le altre) approfondire queste due tematiche per costruire percorsi didattici che potessero aiutare gli studenti nel faticoso compito di argomentare e rappresentare.

La struttura è stata la stessa del primo progetto EM.MA.:

- un seminario regionale iniziale;
- due seminari provinciali;
- due seminari per reti di scuole;
- un seminario conclusivo regionale.

EM.MA. alla seconda(ria) - Anno scolastico 2011-12: le aree tematiche

Il grande entusiasmo con il quale sono stati accolti i progetti EM.MA. 1 ed EM.MA. 2 ha spinto il gruppo di pilotaggio a cercare di ripetere l'esperienza anche nel passaggio alla scuola secondaria di II grado, alla luce delle nuove *Indicazioni nazionali per i Licei* e delle *Linee guida per gli Istituti tecnici e professionali.*

È nato così il progetto EM.MA. alla seconda(ria) sviluppatosi nell'anno scolastico 2011-12. L'occasione del lancio del progetto è stata il convegno regionale aperto agli insegnanti della scuola secondaria di II grado che si è tenuto a Rimini nell'aprile del 2011. A questo convegno, che aveva per titolo "Ritorno a Mathelandia. I nuovi curricoli della scuola secondaria di II grado", è stato invitato un docente referente di dipartimento per ciascuna scuola secondaria di II grado dell'Emilia-Romagna.

A gennaio del 2012 con un seminario regionale di avvio è iniziato il progetto EM.MA. alla seconda(ria) avente per focus le quattro aree tematiche dei curricoli di matematica e le relative prove Invalsi.

Ogni provincia è stata sollecitata a trattare in modo diffuso e a produrre materiali inerenti a uno dei quattro temi (*Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni*) attraverso seminari provinciali e/o di rete, con attenzione alla verticalità del curricolo. Gli incontri provinciali si sono tenuti da marzo e a maggio del 2012, sempre con le stesse modalità. Il seminario regionale conclusivo che doveva avvenire alla fine di maggio 2012 per raccogliere i lavori delle 9 province non si è svolto a causa del grave terremoto che ha interessato la nostra regione.

Alcune riflessioni generali

Schematizziamo di seguito alcuni elementi per rendere evidente l'impatto che il progetto ha avuto a livello regionale.

Qualche numero

- Partecipanti: oltre il 90% delle 510 istituzioni scolastiche della regione; circa 50 fra tutor senior e tutor M@t.abel; quasi 900 docenti tutor junior; e 145 docenti referenti dei dipartimenti di matematica delle scuole secondarie di II grado, oltre a circa altri 4.500 docenti delle singole scuole, per un totale di circa 5.500 docenti dei vari ordini di scuola.
- Seminari regionali: 6.
- Seminari provinciali: 45.
- Incontri di rete: circa 140.
- Incontri di scuola: generalmente 4 per ogni scuola del I ciclo della regione.

Cosa si è fatto nelle scuole

- Analisi e rielaborazione di prove.
- Modifica e/o produzione autonoma di item.
- Prove sul campo: in uscita dalla scuola primaria, in ingresso nella scuola secondaria di I grado e in uscita dalla stessa.
- Prove sul campo in verticale (la stessa prova, opportunamente adattata, in classi della primaria e della secondaria).
- Analisi di item e di prove, dal punto di vista degli errori più diffusi, in relazione alle prassi didattiche.
- Riflessione sulle metodologie.

Obiettivi raggiunti

- Reti di scuole come risorsa (per la cooperazione fra diversi ordini scolastici dello stesso bacino e per ampliare il coinvolgimento dei docenti).
- Consapevolezza della verticalità degli apprendimenti e trasversalità delle competenze.
- Primo livello di analisi del problema dell'insegnamento/apprendimento della matematica, a partire dagli esiti delle valutazioni esterne.

Punti di forza di EM.MA.

- Continuità verticale intesa come confronto/cooperazione tra insegnanti.
- Docenti-tutor (senior e junior) con ruolo e compiti chiaramente definiti.
- Tutor M@t.abel come supporto e 'sguardo in avanti' (biennio superiori).
- Tema circoscritto: analisi di prove di valutazione (Invalsi, Pisa, Timss...) per riflettere sugli errori, individuare stereotipi, misconcetti e difficoltà con particolare attenzione allo sviluppo verticale.
- Coinvolgimento degli Uffici Scolastici Territoriali.
- Coinvolgimento dell'USR.
- Confronto professionale fra tutte le scuole di II grado della regione.

- Organizzazione 'prussiana' del progetto. Lo staff regionale ha predisposto lo schema organizzativo e tutte le slide per i seminari provinciali (che sono poi state rielaborate e adattate a livello territoriale) e materiali per i seminari di rete, rendendoli disponibili su un sito di lavoro.

Punti di debolezza di EM.MA.

- Periodo temporale della realizzazione del progetto (sarebbe stato meglio realizzare gli eventi nel I quadrimestre).
- Tempi di lavoro dei docenti molto più ampi del previsto (del resto, un confronto costruttivo richiede tempo).
- Rischio di insegnare per addestrare gli studenti ai test (deve essere ben chiaro l'obiettivo del progetto).
- Scarso coinvolgimento dei dirigenti scolastici, specie se di istituzioni scolastiche diverse.

Un progetto futuro

Dai vari seminari di chiusura sono emerse diverse riflessioni da parte dei tutor senior:

- Importanza di sviluppare curricolo verticale, didattica elicoidale e di lungo periodo, didattica laboratoriale.
- Importanza di esplicitare come insegnare e cosa insegnare, come imparare e cosa imparare.
- Importanza di sviluppare, coinvolgendo gli studenti, una riflessione su contesti legati alla realtà, metacognizione (riflessione sulle proprie strategie), verbalizzazione (spiega il tuo procedimento), discussione collettiva in classe, argomentazione (spiega perché…), riflessione sugli errori.

Richieste/proposte condivise

- Documentazione: accesso funzionale a tutti i materiali prodotti.
- Opportunità, e in molti casi necessità, di *continuare il percorso intrapreso*, passando dalla sensibilizzazione all'approfondimento e analizzando con più sistematicità anche le prove SNV della scuola primaria e della secondaria di II grado.
- *Certificazione delle competenze*: focalizzare l'attenzione, in un lavoro futuro, su alcune competenze significative e sui modi per raggiungerle (in uno sviluppo verticale del curricolo), valutarle e certificarle.
- Valorizzare i gruppi di lavoro creati in ogni territorio provinciale e collegato ai docenti referenti all'interno delle istituzioni scolastiche, che rappresentano un valore aggiunto da non disperdere.
- Organizzare seminari regionali residenziali, anche a spese delle scuole, per confronto, conoscenza e approfondimento del proprio essere professionisti.

I SEMINARI REGIONALI

RICERCHE DI QUALITÀ SULL'INSEGNAMENTO/APPRENDIMENTO NELLA SCUOLA

A cura di Anna Maria Benini

Dal dicembre 2008 al gennaio 2012 si sono svolti 6 seminari regionali, rivolti inizialmente a docenti tutor senior del I ciclo, tutor Mat@abel e responsabili degli UST, estesi poi a docenti del II ciclo di istruzione.

I primi quattro seminari, relativi ai progetti EM.MA. 1 ed EM.MA. 2, hanno fatto riferimento all'insegnamento/apprendimento della Matematica nel I ciclo di istruzione; gli ultimi due sono stati dedicati prioritariamente al II ciclo.

I contributi sono stati significativi e qualificati nell'ambito di una filiera di pensiero intesa a stimolare una ricerca di qualità nelle scuole, sulla base di sollecitazioni culturali e di esperienze sistematiche, didattiche e valutative: gli esperti provenivano dalle Università di Bologna, Modena-Reggio Emilia, Genova, Pisa, Torino, da Autonoma Università di Barcellona e da Invalsi.

Segue una sintesi degli interventi dei relatori.

Paolo Boero: IMPARARE AD ARGOMENTARE… È POSSIBILE[1]

Argomentazione è competenza centrale nelle attività matematiche e più in generale obiettivo della formazione intellettuale del cittadino; è in tale prospettiva che trova forte motivazione l'insegnamento/apprendimento dell'argomentazione.

Nel linguaggio corrente si considera argomentazione ogni discorso logicamente strutturato con lo scopo di giustificare o mettere in discussione un'affermazione. Fra le definizioni elaborate, molti ricercatori nell'ambito della didattica della matematica utilizzano la proposta del filosofo del linguaggio Toulmin, perché copre tutti i tipi di argomentazione matematica e stabilisce collegamenti con molti altri ambiti e con la vita quotidiana.

Si tratta di 'passi di ragionamento' concatenati, costituiti da un dato o conoscenze di supporto, un'inferenza e una conclusione; la conclusione può essere dato per un passo successivo.

Distinzioni e parentele tra le argomentazioni in ambiti diversi (matematica, scienze, grammatica, discipline storico-antropologiche) sono, in primo luogo, riferibili alla na-

[1] 17 marzo 2011.

tura delle inferenze (garanzie di validità – warrant) e quindi ai significati contestuali del 'perché' o di forme espressive equivalenti (giustificazione causale, giustificazione finale, perché inferenziale, riferimento a leggi sociali, riferimento a teorie o teoremi o proprietà, riferimento a leggi grammaticali…). Sulla base dei diversi significati del 'perché', emergono vicinanze interessanti tra contesti diversi di sviluppo dell'argomentazione, ad esempio le tematiche delle 'leggi' e delle 'regole' con le tematiche grammaticali o le tematiche matematiche. Ciò consente di lavorare su pratiche argomentative importanti e vicine a quelle della matematica, anche quando la padronanza dei contenuti matematici non è ancora sufficiente.

La caratterizzazione dei diversi significati contestuali del 'perché' è anche utile come oggetto di riflessione per gli alunni a partire dalla terza/quarta classe della scuola primaria sia per migliorare la comprensione dei testi (matematici, storici, ecc.) attirando l'attenzione sui connettivi e sulle forme connettivali, sia per educare al passaggio dal contenuto alla forma che lo esprime, così importante ad esempio nel passaggio dall'aritmetica all'algebra e dal 'discorso matematico' alla 'logica matematica'.

Un esempio già in terza classe primaria

Leggi con attenzione queste due frasi:

"*Lucia ha comprato un maglione rosso e blu perché costava poco*"

"*Lucia ha comprato un maglione rosso e blu perché Marco, tifoso genoano, la notasse*"

I due 'perché' hanno la stessa funzione? Motiva la tua risposta, e scrivi altri esempi per chiarire meglio il tuo pensiero

Per superare le difficoltà attualmente evidenti occorre uno sviluppo verticale di attività sull'argomentazione, partendo fin dai 5-6 anni. Non si tratta di tecniche, ma di atteggiamenti, valori, risorse logico-linguistiche da costruire progressivamente con richieste del tipo "*spiega perché, motiva la tua scelta, confronta con…, stabilisci se…, valuta aspetti positivi e negativi…*". Occorre un contesto educativo coerente, con costante attenzione alla precisione e pertinenza del linguaggio e alla 'pedagogia dell'errore' come riflessione sulle cause e ricerca del superamento.

Nella scuola primaria l'argomentazione è meglio promossa come competenza trasversale, valorizzata dall'insegnante attraverso i suoi stessi comportamenti e con scelte metodologiche e pedagogiche coerenti (valorizzazione delle idee, ascolto, aiuto nell'elaborazione di un discorso). In ambito matematico si può distinguere fra percorsi didattici brevi (es. quanti sono i numeri interi?) o lunghi (es. approccio al pensiero probabilistico).

Nella scuola secondaria di I grado si possono prevedere:

- ovunque possibile, lo sviluppo coordinato di attività argomentative in ambiti disciplinari diversi;

- nelle ore di matematica e scienze un esercizio dell'argomentazione su temi matematico-scientifici continuando il percorso della scuola primaria (ipotesi motivate, loro validazione…). Ad esempio: le proprietà dei numeri, quanti sono i numeri compresi fra 1 e 2, modellizzazione probabilistica di fenomeni, costruzioni geometriche, modellizzazione matematica di fenomeni fisici, confronto di strategie risolutive di problemi, spiegazione di errori ricorrenti.

Nella scuola secondaria di II grado, la costruzione di una didattica dell'argomentazione dipende dalle esperienze maturate dagli alunni nei percorsi precedenti e dalle risorse, in termini di ore da dedicare a questa attività. Esempi di nuclei concettuali per percorsi sull'argomentazione: funzioni, porsi e risolvere problemi in vari ambienti, costruzioni geometriche, avvio al pensiero teorico e alla dimostrazione in geometria, avvio al pensiero statistico e probabilistico.

In tutti i casi c'è una consonanza di fondo con la didattica laboratoriale che implica la partecipazione dello studente al processo di costruzione del prodotto.

Considerazioni che si possono trarre dalle esperienze e che si collegano a risultati generali delle ricerche sullo sviluppo delle competenze argomentative:

- stretto legame tra capacità di comprendere un testo che contiene argomentazioni (esplicite o anche parzialmente implicite) e capacità di produrre argomentazioni;
- trasversalità di alcune abilità di base che riguardano l'argomentazione;
- ruolo dell'elaborazione personale dei contenuti nella comprensione e nella produzione dell'argomentazione e quindi centralità della padronanza dei contenuti nello sviluppo delle competenze argomentative.

GIORGIO BOLONDI: LA MATEMATICA COME EDUCAZIONE AL PENSIERO[2]; QUALE MATEMATICA FRA I E II CICLO[3]; CULTURA MATEMATICA E VALUTAZIONE DEGLI APPRENDIMENTI: DAI CONTENUTI AI PROCESSI[4]

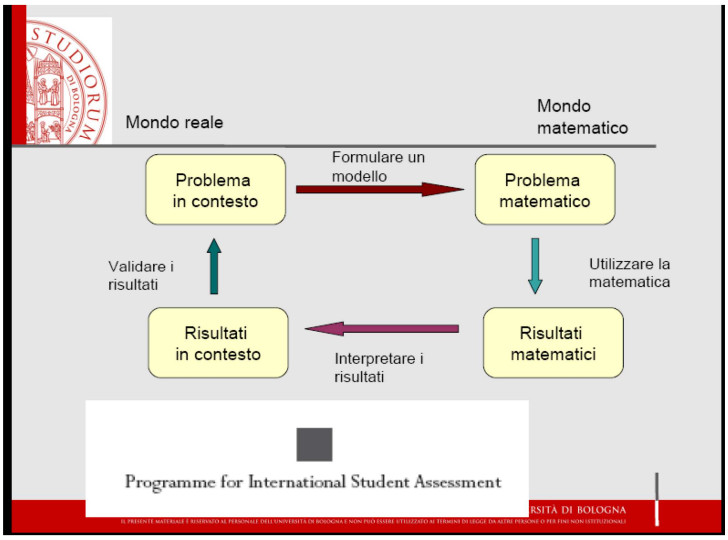
Il primo biennio della secondaria di II grado presenta una situazione difficile e ambigua, fra la conclusione di un percorso (I ciclo), il consolidamento o il recupero legati all'obbligo di istruzione e l'acquisizione di strumenti e l'apertura di orizzonti nuovi (triennio fortemente orientato).

Quale il ruolo della matematica in questa fase della formazione del ragazzo, caratterizzata da un salto cognitivo? Quali le peculiarità per la formazione del pensiero e delle competenze matematiche? Il salto di qualità sta nell'acquisizione di forme di pensiero simbolico (padronanza del linguaggio simbolico) e nella conquista del ragionamento astratto (acquisizione di strutture di pensiero formale). Occorre dunque rinnovare la didattica, ridefinendo in particolare gli obiettivi di apprendimento, che superando la prassi di un'algebrizzazione pervasiva e ossessiva individuino in particolare obiettivi di ordine strumentale, culturale e formativo. I confronti internazionali suggeriscono anche di ridefinire gli ambiti di contenuti (es. le idee della statistica assumono un ruolo fondamentale).

Le indicazioni per i Licei e le Linee guida per l'istruzione tecnica mettono in luce la struttura, le connessioni e la dinamica del percorso di insegnamento-apprendimento.

L'idea di *modello* diventa centrale nel percorso di matematica. Il ciclo della modellizzazione matematica è una delle caratteristiche chiave del quadro di riferimento di Pisa 2012. È utilizzato per definire i processi matematici in cui gli studenti sono impegnati quando risolvono problemi (problema in contesto, formulazione del modello matematico del problema, risoluzione matematica, interpretazione dei risultati e validazione degli stessi in rapporto al contesto).

[2] 15 dicembre 2008.
[3] 6 aprile 2011.
[4] 19 gennaio 2012.



Resta importante l'acquisizione delle tecniche, evitando però tecnicismi ripetitivi o sterili che non contribuiscono alla comprensione dei problemi. Ad esempio, lo studente dovrà essere in grado di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (con equazioni, disequazioni, sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali. In particolare dovrà essere in grado di ottenere informazioni per la soluzione di una rappresentazione matematica (modello) di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.

Esempi

D24. La formula $l = l_0 + k$ x P esprime la lunghezza l di una molla al variare del peso P applicato. l_0 rappresenta la lunghezza in centimetri “a riposo” della molla; k indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso. Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione: *"È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione"*?

- ☐ A. $l = 15 + 0{,}5$ x P
- ☐ B. $l = 75 + 7$ x P
- ☐ C. $l = 70 + 0{,}01$ x P
- ☐ D. $l = 60 + 6$ x P

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	*B*	*C*	*D*
D24	11,8	8,1	33,2	38,1	8,9

D23. Le dimensioni di una piazza rettangolare di una grande città sono circa 620 m × 120 m. Le stime comparse sui giornali sul numero di partecipanti a una manifestazione che ha riempito la piazza variano da 100 000 a oltre 1 000 000.

a. Sapendo che diverse fotografie scattate durante la manifestazione evidenziano una densità di circa 4 persone al metro quadro, che cosa si può concludere circa l'effettivo numero dei partecipanti?
- A. Le stime dei giornali sono tutte errate perché dalle informazioni disponibili i partecipanti non potevano essere più di 20 000.
- B. Una stima ragionevole è di circa 300 000 partecipanti.
- C. Ha ragione chi ha parlato di più di un milione di partecipanti.
- D. La piazza non può contenere molte persone più di uno stadio, quindi c'erano meno di 150 000 partecipanti.

b. Mostra i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.

……………………………………………………………………………………………………….

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	B	*C*	*D*
D23a	17,6	18,9	46,3	7,1	10,0

Item	*Mancata risposta*	*Errata*	*Corretta*
D23b	43,6	21,6	34,8

In generale il passaggio dal calcolo aritmetico al linguaggio e al calcolo algebrico deve essere molto curato e arricchito di senso, ugualmente la costruzione del ragionamento formale deve essere progressiva e riguardata come un obiettivo di lungo termine, non un prerequisito.

I verbi 'formulare/impostare', 'utilizzare', 'interpretare' utilizzati nel ciclo della modellizzazione si riferiscono ai tre *processi* in cui gli studenti sono impegnati in quanto solutori attivi di problemi (riconoscere quale matematica può essere utilizzata per comprendere o risolvere un problema, trasformare una situazione dandole una struttura matematica e una rappresentazione adeguata, mettere in campo ragionamenti matematici e utilizzare concetti, procedure e strumenti per trovare una soluzione matematica, manipolare modelli, riflettere sui risultati matematici, valutare le soluzioni ottenute). Ogni processo può essere correlato con *capacità matematiche* (matematizzazione, comunicazione, rappresentazione, argomentazione, formalizzazione, *problem solving*, applicazione).

In generale i termini utilizzati nella definizione di competenza matematica mettono l'accento sul coinvolgimento attivo nel fare matematica (ragionare matematicamente, usare concetti, procedure, fatti e strumenti della matematica per descrivere, spiegare e predire fenomeni).

L'attenzione ai processi permette all'insegnante anche di interpretare correttamente i risultati delle valutazioni esterne, predisporre valutazioni interne più complete, ricche e articolate, progettare e condurre in aula una più efficace azione didattica.

FERRAN FERRER: I SISTEMI EDUCATIVI IN EUROPA: TENDENZE E PROBLEMI ATTUALI[5]

Con uno sguardo sovranazionale vengono tracciati i problemi educativi in relazione a quattro snodi cruciali: la politica educativa, le istituzioni scolastiche, il curriculum e il corpo docente.

Le scelte di politica educativa si connotano per uno spostamento generale degli assi portanti:

- dall'educazione come bene individuale al bene collettivo;
- dalla 'segregazione' all'inclusione educativa;
- dall'eccellenza fine a se stessa verso l'equità;
- dalla centralizzazione al decentramento;
- dalla valutazione come mezzo per governare verso un sistema per rendicontare;
- dalla scuola 'libro, carta e penna' verso i nativi digitali.

In relazione alle istituzioni scolastiche la dirigenza si connota sempre più come leadership e la scuola come comunità educante, con compiti anche di prevenzione e sostegno verso gruppi di alunni eterogenei.

Per quanto riguarda il curricolo, che deve tener conto di differenziazioni locali, la cultura docente deve prestare attenzione al passaggio dall'insegnamento all'apprendimento, dall'educazione multiculturale a quella interculturale, dall'apprendimento per la vita a quello lungo la vita (*Life Long Learning*).

La professionalità docente si caratterizza per uno spostamento di tendenza: dal docente come fonte di cultura a colui che orienta la cultura, dal lavoro frontale in classe a quello con la classe, dal lavoro isolato al lavoro di squadra, dalla 'vocazione' alla professionalità, dall'attenzione ai diritti dei docenti a quella verso i diritti dei bambini e dei giovani.

In questo quadro le innovazioni della scuola italiana trovano una cornice comune.

[5] 5 aprile 2011.

FRANCESCA MARTIGNONE: IL PROGETTO MMLAB-ER - LABORATORIO DELLE MACCHINE MATEMATICHE PER L'EMILIA-ROMAGNA[6-7]

Estendendo il modello elaborato a Modena, sono state allestite, in altre quattro province, aule attrezzate con 80 esemplari di macchine matematiche e vari materiali didattici. Partendo da testi storici, le Macchine Matematiche sono state costruite a scopo didattico per l'aritmetica e per la geometria.

Il 'laboratorio' di matematica si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate sì sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici e legate alle interazioni tra le persone durante l'esercizio delle attività. Facendo, vedendo fare e comunicando si sviluppa una dialettica produttiva fra teoria e pratica.

Il progetto ha previsto un programma di formazione per gli insegnanti, di scuola primaria e secondaria insieme, con approccio laboratoriale. Ogni attività è stata condotta attraverso l'analisi dello strumento proposto (come è fatto?/esplorazione; perché lo fa?/argomentazione; cosa succederebbe se?/condizionalità, *problem solving*) e se ne è analizzata l'importanza nella storia della matematica, la presenza nei Curricoli e Indicazioni nazionali e la rivalutazione nelle prove nazionali e internazionali. Nelle discussioni si è riflettuto sui processi messi in gioco e si è valutata anche l'eventuale sostituzione con software dinamico.

Successivamente gli insegnanti hanno trasferito in classe l'attività di laboratorio, rendendosi conto dell'importanza di guidare, osservare e ascoltare i ragazzi. Hanno in particolare verificato che l'apprendimento diviene più consapevole e il linguaggio specifico più corretto e adeguato.

---

[6] Progetto a cura di M.G. Bartolini Bussi, R. Garuti, F. Martignone, M. Maschietto, Associazione Macchine Matematiche.

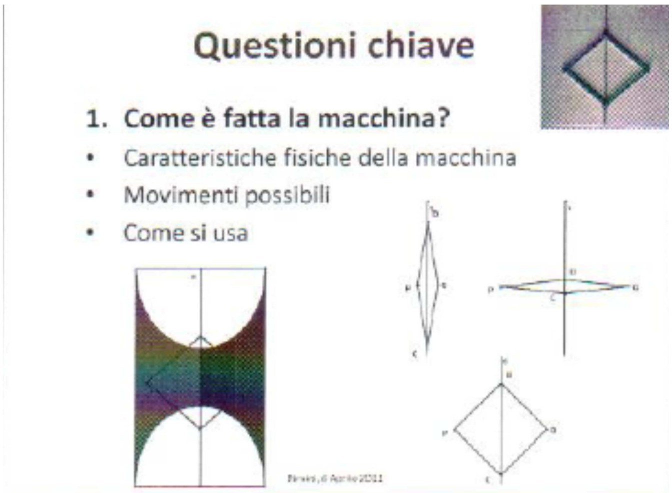
[7] 6 aprile 2011.

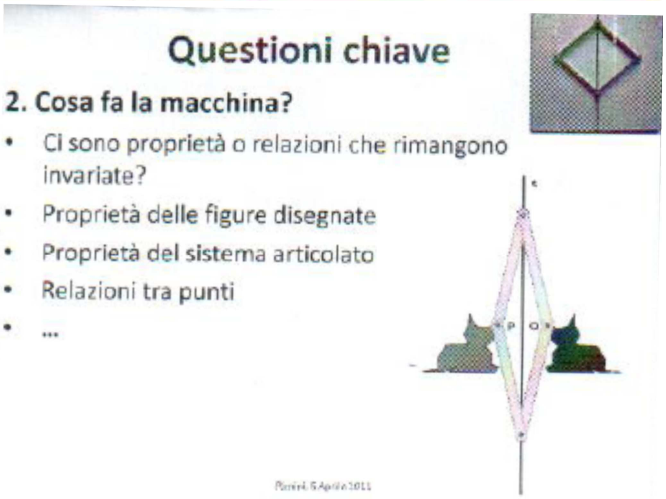
Esempi

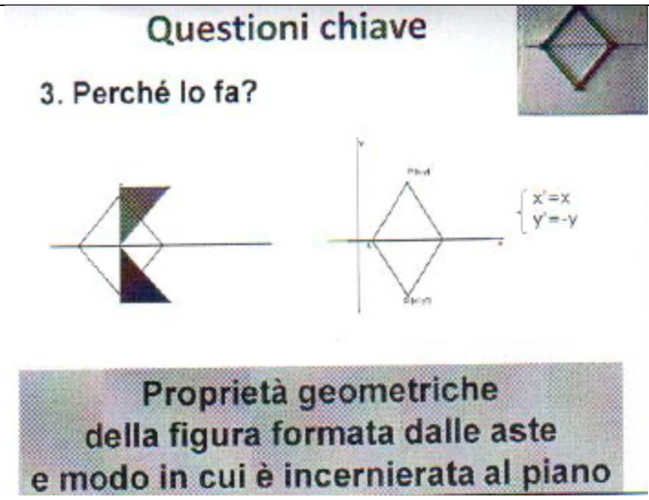
Pantografi per le trasformazioni geometriche del piano

I pantografi sono costruiti in modo tale da costringere due punti a *seguire una legge matematica predeterminata*.
Questi due punti *coesistono* e sono sempre visibili nella struttura fisica della macchina. Il loro movimento sul piano (vincolato dalla struttura della macchina) può generare infiniti punti che godono delle stesse proprietà.

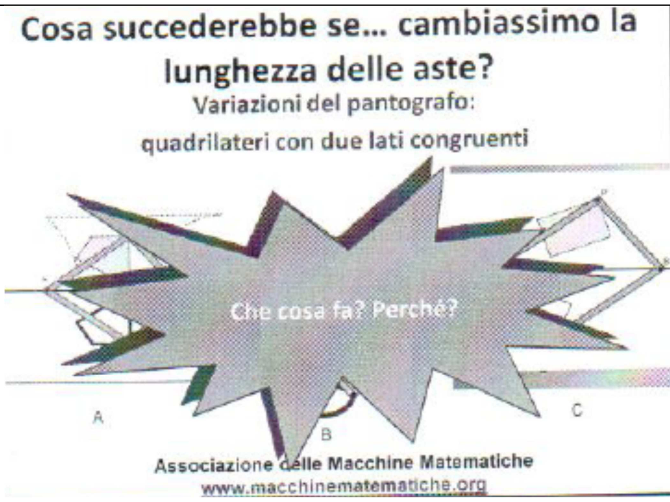
Linee guida di un percorso: come è fatta la macchina, cosa fa, perché lo fa.



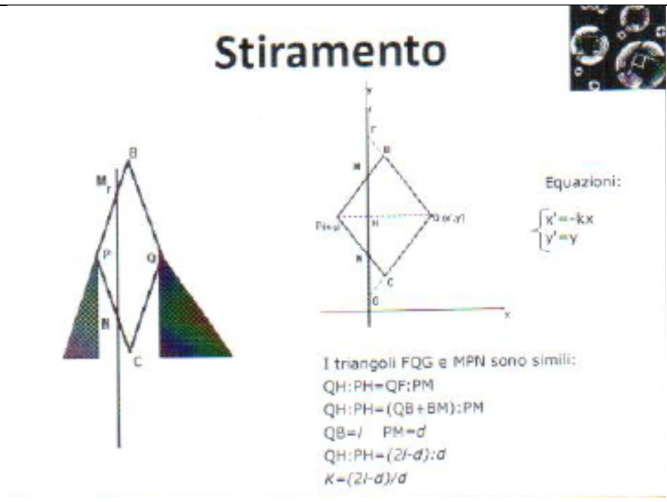


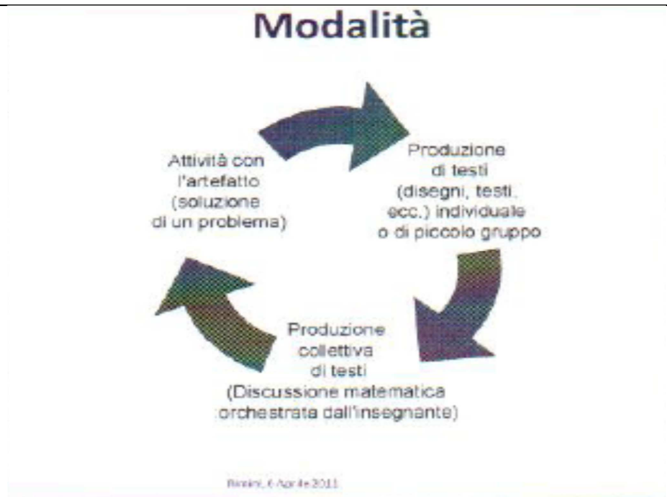


Nei pantografi il movimento e la traccia permettono di mettere in luce la relazione (covarianza e dipendenza) tra i due punti 'trasformati', ma anche la relazione tra le figure prodotte dalla macchina.

<table>
<tr>
<td>Cosa succederebbe se…?</td>
<td>


E se il rombo fosse incernierato alla guida in modo diverso…
</td>
</tr>
</table>

	
Qual è la matematica in gioco?	- le trasformazioni geometriche del piano - la geometria euclidea - la geometria analitica
Quali processi?	- produzione di congetture, argomentazioni e costruzione di dimostrazioni - genesi della condizionalità - attività di *problem posing* e *problem solving*
Le sperimentazioni svolte dagli insegnanti	Laboratorio in classe: la costruzione di significati matematici è strettamente legata alla comunicazione e condivisione delle conoscenze sia attraverso i *lavori in piccoli gruppi* di tipo collaborativo o cooperativo, sia attraverso lo strumento metodologico della *discussione matematica* (opportunamente gestito dall'insegnante)



Ruolo dell'insegnante:
- **pianificare** l'attività;
- **aiutare** gli studenti nelle situazioni di blocco, facendo esplicitare le difficoltà incontrate;
- **orchestrare** la fase di discussione collettiva.

DOMINGO PAOLA: DUE COMPETENZE STRATEGICHE PER LA MATEMATICA: ARGOMENTARE E RAPPRESENTARE[8]

Si può rispondere all'imperativo di migliorare l'apprendimento della matematica solo partendo dagli obiettivi dell'insegnamento/apprendimento in termini di competenze e conoscenze essenziali e condividendo alcuni principi:

- la funzione strumentale e la funzione culturale della matematica sono due aspetti irrinunciabili per una formazione equilibrata degli studenti;
- compito dell'azione didattica è favorire il passaggio da forme di conoscenza tacite a forme consapevoli, facendo comprendere il ruolo del sapere teorico;
- la scuola non può più permettersi di essere selettiva, nemmeno in forma occulta;
- la funzione docente richiede un costante esercizio della ragione, ma anche un meditato ottimismo della volontà.

Per affrontare questa 'emergenza matematica' occorre un paziente e ostinato esercizio della didattica laboratoriale: attività di esplorazione che favorisce la produzione di congetture e la loro validazione con argomentazioni pertinenti. Favorisce anche l'uso di molteplici rappresentazioni degli oggetti matematici e la conversione da una rappresentazione all'altra.

Che cos'è un'argomentazione? Il filosofo del linguaggio Toulmin (anni '50) la considera costituita da 'passi di ragionamento' concatenati, costituiti da un dato o conoscenze di supporto, un'inferenza e una conclusione. Chi argomenta deve possedere conoscenze sull'oggetto dell'argomentazione, gestire il ragionamento sul terreno logico e linguistico e possedere diversi modelli e tipi di giustificazione (deduzione, controesempi, induzioni, analogie…).

L'argomentazione, che si sollecita attraverso richieste di spiegare il perché e giustificare le risposte, deve inserirsi in molte attività e in ambiti disciplinari diversi, partendo dalla prima classe della scuola primaria.

[8] 19 marzo 2010.

Esempi
Scuola dell'infanzia e I classe scuola primaria
La linea dei numeri

Consegne	1. È importante per te avere la linea dei numeri? 2. A che cosa serve la linea dei numeri? (discussione) 3. Oggi è il 24 aprile. L'8 maggio sarà la festa della mamma. Quanti giorni mancano? Spiego il mio ragionamento. (individuale) 4. Oggi tre bambini sono assenti. Sai dirmi quanti sono presenti a scuola? (individuale)
Modalità di gestione	Sulla parete dell'aula, sopra il calendario, è appesa una linea dei numeri da 1 a 31. Una mattina la linea dei numeri non c'è più: "*È importante per te avere la linea dei numeri?*". Dalle risposte individuali emerge che è uno strumento importante perché ci AIUTA. Si va a riprenderla: "*In che cosa ci aiuta?*" Durante la discussione ogni volta che i bambini giungono a una conclusione, l'insegnante riassume e chiarisce il pensiero del bambino.
Natura e livello dell'argomentazione	- Le consegne 1 e 2 spingono i bambini a motivare l'utilità della linea dei numeri a partire da riflessioni sulle sue funzioni, che i bambini conoscono bene perché le sperimentano tutti i giorni. Hanno argomenti per sostenere le loro affermazioni, producono esempi specifici. - Nelle consegne 3 e 4 i bambini si appoggiano, per rispondere, al calendario e alla linea dei numeri e ciò fornisce al numero una semantica familiare, che permette di risolvere anche problemi complessi per quell'età.
Possibilità di articolazione verticale	Il collegamento con le attività matematiche della prima classe primaria è assolutamente naturale e in continuità, almeno SE l'approccio al numero non è di carattere insiemistico (o peggio, di tipo esclusivamente insiemistico). Un approccio prevalentemente insiemistico, per bambini abituati a muoversi con disinvoltura sulla linea dei numeri, può risultare rischioso e portatore di frustrazioni che rischiano di segnare l'esperienza con la matematica. Il suggerimento implicito è che il senso ordinale del numero possa essere utilizzato come veicolo per altri sensi. *Con l'introduzione al concetto di variabile si possono affrontare le funzioni lineari nella scuola secondaria di I e di II grado.*

Classi quinte di scuola primaria e studenti di scuola secondaria di II grado con ruolo di tutor.

Il valore del denaro nel tempo

Schema progetto	
Aspetti motivazionali	Interviste a genitori e nonni, ricerche su internet e sui libri per individuare fatti importanti dal 1960 al 2005 (locali e nazionali)
Aspetti concettuali Concetti matematici interessati	Cambiamenti del valore del denaro nel tempo (variazione del potere d'acquisto del denaro). Rappresentazioni in scala, rapporti e percentuali Variazioni relative e assolute. Piano cartesiano. Grafico che rappresenta la variazione di una grandezza nel tempo Lettura di grafici Pendenza di un segmento Uso consapevole degli strumenti automatici di calcolo
Fasi del lavoro	
a) Costruzione di una striscia del tempo e, più in generale, attività aventi l'obiettivo di creare contesto, ossia di offrire l'occasione per poter cercare e trovare un 'senso' storico-sociale ai dati numerici da manipolare poi (salario di un operaio, costo degli alimenti, della benzina, dati sulla disoccupazione, sui permessi di soggiorno …). b) Elaborazione e rappresentazione dei dati rilevati (anche con l'utilizzo di un foglio elettronico). c) Scelta di un paniere e introduzione del concetto di potere di acquisto del denaro; analisi, alla luce di tale concetto, dei dati prima elaborati. d) Lettura di un testo per adulti avente come obiettivo quello di proporre alcune riflessioni di carattere sociale sull'evoluzione nel tempo del potere di acquisto del denaro, ma anche sull'evoluzione dei salari e su quella dei 'bisogni indotti'.	
Esempi di attività	
Inizialmente si discute con gli alunni sulla tipologia delle notizie da riportare sulla linea del tempo. Attraverso la lettura di notizie-tipo, si decide la classificazione (es. notizie economiche, storico-geografiche, sociali, sportive, regionali). Si costruisce una legenda con i loghi relativi alle varie tipologie di notizia. Gli alunni possono lavorare in piccoli gruppi, ognuno dei quali si occupa di un anno o di un quinquennio, utilizzando le diverse fonti messe loro a disposizione.	

ORNELLA ROBUTTI: IL PROGETTO M@T.ABEL UN PONTE FRA ORDINI DI SCUOLA DIVERSI [9]; I MATERIALI M@T.ABEL: QUALI INDICATORI PER IL RINNOVAMENTO DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA[10]

Il progetto nazionale M@t.abel, con le sue caratteristiche operative e i suoi strumenti, risponde a snodi problematici relativi a studenti, tecnologie, insegnanti.

L'osservazione dei processi cognitivi e metacognitivi degli studenti evidenzia carenze sulla conoscenza dei contenuti in matematica e sulle modalità di apprendimento: la tenuta di un diario di bordo può aiutare ad approfondire le informazioni e la riflessione sugli indicatori.

Gli strumenti tecnologici influenzano la conoscenza, superando la dicotomia fra tecnologia ed essere umano, che è utilizzatore ma anche costruttore e sviluppatore: la piattaforma e-learning favorisce il confronto e la condivisione di esperienze.

Apprendere è fenomeno sociale e frutto dell'esperienza situata: i docenti diventano una comunità di apprendimento professionale, dove si intrecciano formazione permanente (in presenza e a distanza) e sperimentazione sul campo, teoria e pratica didattica.

Il progetto aiuta ad affrontare la sfida cognitiva di questo secolo:

- dall'esperienza individuale all'esperienza condivisa;
- dalla conoscenza sequenziale alla conoscenza reticolare;
- dalla creatività personale alla creatività collettiva;
- dal sapere come fatto isolato al sapere dialogico e alla pratica comunitaria;
- dal linguaggio formale a quello non formale.

Il progetto M@t.abel si intreccia con progetti europei e con prove nazionali e internazionali, in particolare per quanto riguarda indicazioni su come affrontare i problemi, varietà degli strumenti utilizzabili, percorsi di argomentazione, oltre che per le competenze sviluppate e i relativi processi; ad esempio:

- formulare (identificare gli aspetti matematici; usare la tecnologia);
- utilizzare (implementare strategie; applicare fatti matematici; manipolare numeri);
- interpretare (interpretare un risultato matematico).

Il progetto si pone come lavoro in continuità per docenti di ordini di scuola diversi, chiamati ad affrontare un'attività nel gruppo dei pari e ad adattarla poi alla classe in cui operano, dopo averne esplicitato nodi concettuali, obiettivi, metodologie di lavoro, strumenti da utilizzare e risultati attesi in termini di processi e di prodotti degli studenti.

Chiavi di volta per il cambiamento sono l'insegnamento per competenze, il laboratorio di matematica, l'attività di *problem solving*, l'argomentazione, il lavoro di gruppo.

---

[9] 6 aprile 2011.
[10] 19 gennaio 2012.

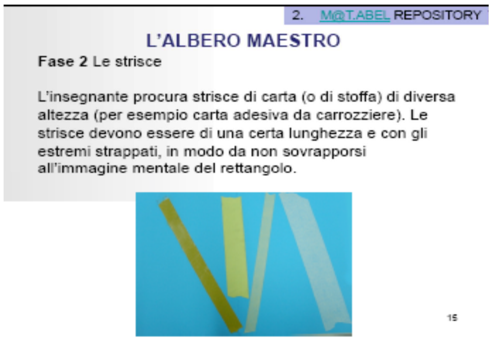
Esempi

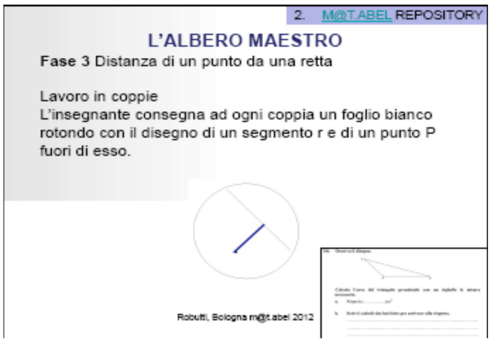
Scuola primaria e scuola secondaria di I grado

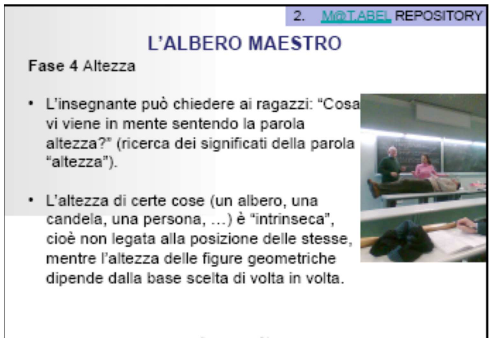
L'albero maestro della barca

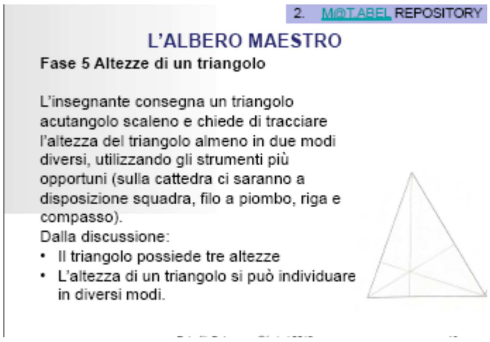
Nodo concettuale	Distanza tra un punto e una retta, insieme ai nodi a esso legati: la perpendicolarità e le altezze di un triangolo in situazioni non stereotipe, come quando non ci sono lati orizzontali o verticali o quando il triangolo è ottusangolo.
Risultati attesi	Gli allievi saranno capaci di tracciare correttamente le altezze in un triangolo, conosceranno il significato di distanza punto-retta, di perpendicolare e di altezza, superando i più usuali misconcetti.

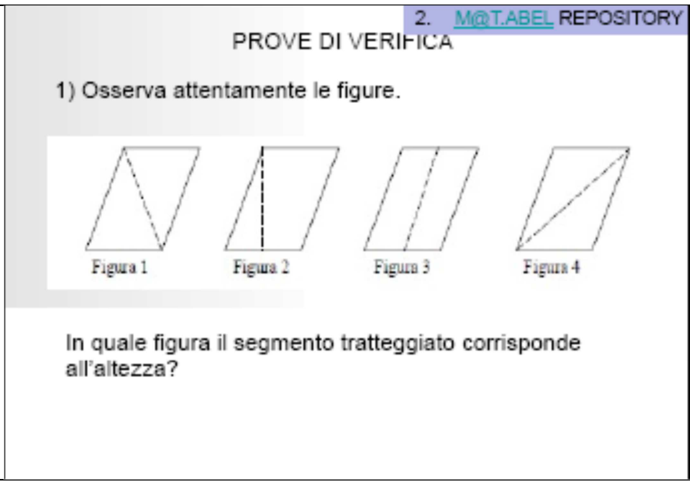
Fasi del lavoro



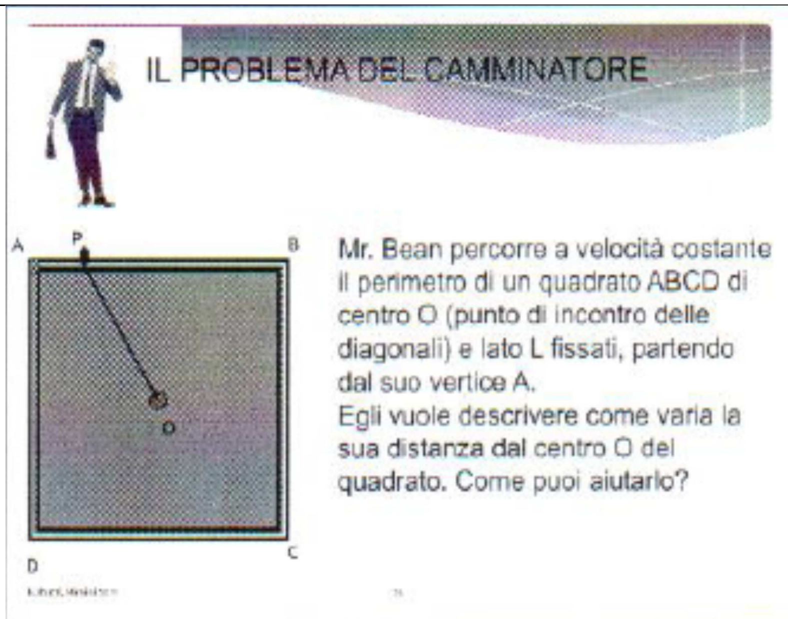




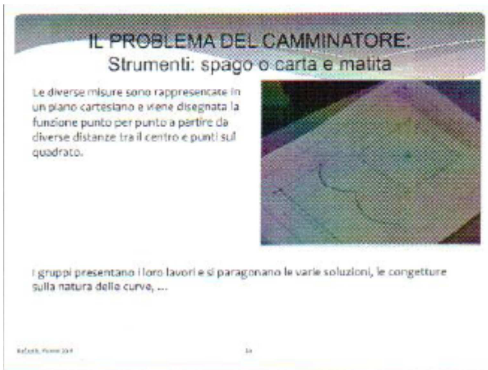


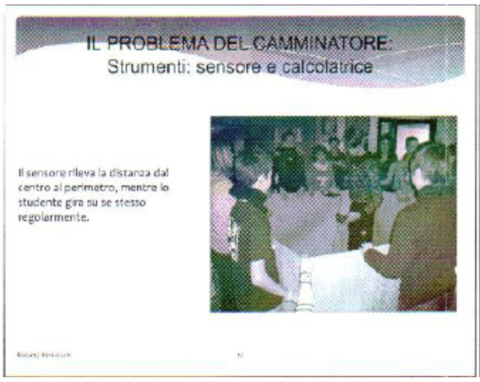
Prove di verifica Analisi di prove Invalsi	

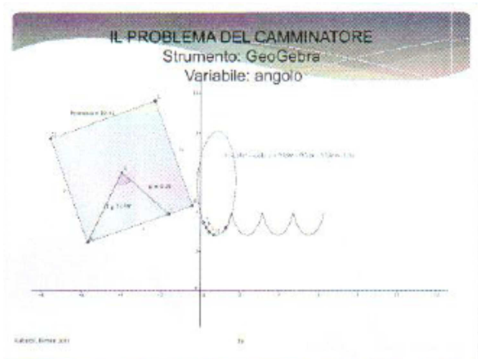
Scuola secondaria di I o di II grado
Il problema del camminatore

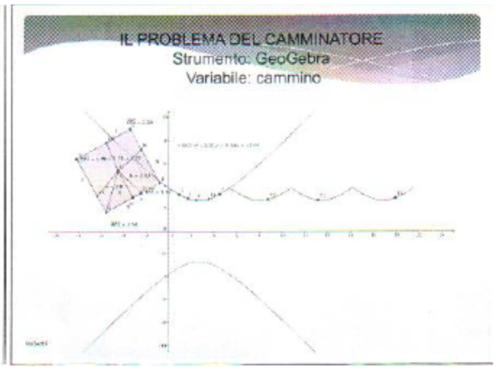
Nodi concettuali	Variabile indipendente e dipendente Funzione di grandezze geometriche Rappresentazione grafica di funzioni
Competenze	Analizzare una situazione geometrica e determinare la variabile indipendente e quella dipendente Determinare una relazione tra le due variabili attraverso proprietà e definizioni note Rappresentare la relazione individuata attraverso l'utilizzo di un software (GeoGebra, TI-Nspire) Utilizzare il software per esplorare il modello della situazione geometrica Determinare una formula algebrica che rappresenti la relazione tra variabili, ovvero la funzione che rappresenta il modello Confrontare diversi modelli per la stessa situazione geometrica Generalizzare la situazione geometrica
Il problema	

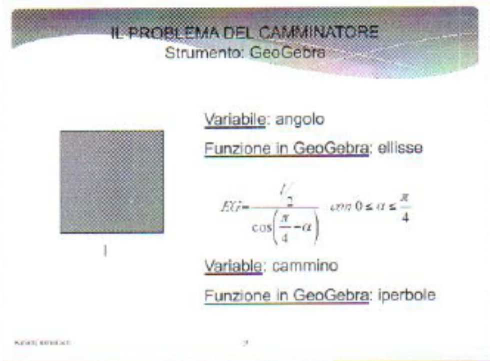
Fasi del lavoro: strumenti e argomentazione











ROSETTA ZAN: LA DIMENSIONE NARRATIVA NEL TESTO DI UN PROBLEMA [11]

Ci sono problemi scolastici e problemi reali. Il problema scolastico è etero-posto: chi lo pone (insegnante) è persona diversa da chi lo deve risolvere (allievo), perciò il problema deve essere formulato verbalmente attraverso un testo. Il problema reale è autoposto dalla stessa persona che lo risolve e non c'è bisogno di formulazione.

L'obiettivo di chi pone il problema scolastico è interno alla matematica e non è necessariamente condiviso da chi lo deve risolvere; l'autore parte da una struttura matematica attorno alla quale costruisce una situazione, una 'storia'.

Il testo di un problema presenta un contesto e una domanda, descrive cioè una situazione familiare, concreta, che fa riferimento al vissuto del bambino e ne richiama la conoscenza enciclopedica (come insieme di aspetti motivazionali e cognitivi); su questo si fonda il processo risolutivo matematico. Se il testo è troppo sintetico e prevale la domanda, c'è una lettura selettiva e acritica (dati numerici e parole chiave) su cui viene fondata la risposta. Se ci sono troppi dettagli e prevale il contesto, il bambino può perdersi in un 'bosco narrativo'.

Il testo di un problema, dal punto di vista narrativo, deve rispondere a certi criteri, come implicazioni per la comprensione della storia narrata e quindi del problema stesso: sequenzialità delle azioni (dimensione temporale) e intenzionalità (scopi, desideri, azioni compiute dai personaggi che devono essere verosimili e connessi). Quando non sono rispettati i criteri, possono insorgere fratture narrative all'interno del contesto o fra contesto e domanda (domanda artificiosa), che ostacolano la rappresentazione della situazione descritta e il processo risolutivo.

In un problema, inoltre, le informazioni rilevanti per comprendere una storia non sono necessariamente di tipo logico, cioè necessarie per risolverlo. Deve esserci coerenza ed equilibrio fra contesto e domanda. Certi problemi risultano 'astratti' perché lontani da scopi, sentimenti e sforzi comprensibili agli alunni; in generale in presenza di fratture narrative all'interno del contesto o fra contesto e domanda, la conoscenza enciclopedica evocata dalla storia non sostiene il pensiero logico necessario per risolvere il problema. Il problema dovrebbe essere formulato con attenzione al dizionario, alla conoscenza enciclopedica e agli impliciti, ma anche con attenzione alla dimensione narrativa. Naturalmente hanno senso e legittimità anche i problemi in cui non c'è una storia o un contesto concreto, ma se scegliamo di contestualizzarli, dobbiamo fare in modo che la storia aiuti il pensiero logico necessario per la risoluzione (nessi causali, cronologici, informazioni e dettagli verosimili e necessari per la soluzione).

È stata costruita e sperimentata una griglia di analisi per la dimensione narrativa del testo di un problema, finalizzata a individuare eventuali fratture narrative e a suggerire come riformulare il problema 'saldando' tali fratture.

[11] 17 marzo 2011.

GLI INTERVENTI DEL RESPONSABILE DELLE PROVE NAZIONALI (SNV) E DEI CONSULENTI INVALSI

Aurelia Orlandoni

Nei seminari regionali si sono avvicendati:

• **Roberto Ricci**, responsabile nazionale del Servizio Nazionale di Valutazione, che ha illustrato gli aspetti tecnici delle rilevazioni e l'evoluzione delle rilevazioni stesse: la somministrazione, l'analisi dei dati raccolti e la restituzione alle scuole

• **Stefania Pozio**, consulente e collaboratrice dell'Invalsi, che da molti anni segue le ricerche internazionali Pisa e Timss e ne ha illustrato gli aspetti peculiari e i risultati sottolineando anche analogie e differenze coll'SNV

• **Rossella Garuti**, consulente Invalsi e componente del Comitato di pilotaggio di EM.MA., che si è occupata degli aspetti più strettamente legati alla didattica della matematica dei quesiti sia nazionali sia internazionali.

Di seguito viene riportata una sintesi complessiva che sottolinea gli aspetti più importanti degli interventi secondo un ordine non strettamente cronologico e senza distinguere i singoli interventi, con lo scopo di costruire un discorso organico sul tema della valutazione degli apprendimenti.

Le indagini internazionali: Pisa[1]

Sono state presentate le caratteristiche dell'indagine Pisa, promossa dall'Ocse e a cui partecipano ormai anche molti paesi al di fuori dell'Ocse:

- cadenza triennale dell'indagine, a partire dal 2000, in cui il *focus* principale è ogni volta un ambito diverso (Lettura, Matematica, Scienze);
- campione di studenti quindicenni indipendentemente dalla classe che frequentano;
- definizione delle competenze (per ognuno dei tre ambiti) che vengono testate dalle prove.

Dall'illustrazione dei risultati in Matematica di Pisa 2006 sono emerse le differenze legate alla tipologia di istituto e alle macro-aree. Il dato più preoccupante è che la differenza fra i risultati del Nord-Est e del Sud Isole è circa 80 punti sulla scala Pisa, la cui media è 500 punti. Inoltre l'analisi per livelli mostra che all'incirca il 30% degli stu-

---

[1] Sintesi degli interventi: "L'indagine Ocse-Pisa e le difficoltà degli studenti italiani" e "Pisa 2009. La competenza matematica degli studenti dell'Emilia-Romagna".

denti italiani è sotto il livello di sufficienza, mentre solo il 6% si trova nei livelli alti. L'altra caratteristica dei risultati italiani è l'elevata percentuale di omissioni, senz'altro una delle più alte, se non la più alta delle nazioni europee.

La relatrice ha illustrato le parti salienti della sua tesi di dottorato, in cui è stata fatta l'analisi delle risposte errate relativa a 28 prove su 1000 fascicoli, poi sono state registrate e analizzate 40 interviste a studenti a cui è stato chiesto di risolvere alcune prove Pisa. La metodologia usata è stata quella del 'pensare ad alta voce' e del 'rispecchiamento'.

Dagli esempi sono emerse come cause principali degli errori:

- scarsa conoscenza di alcuni argomenti;
- scarsa abitudine all'argomentazione;
- scarsa/errata interpretazione del testo;
- difficoltà a riconoscere la matematica appresa se il contesto non è 'scolastico';
- scarsa abitudine a riflettere sul risultato ottenuto;
- convinzione che un problema matematico si risolve sempre e solo attraverso calcoli.

L'indagine 2009 mostra un miglioramento dei risultati italiani legato principalmente a un netto miglioramento delle aree Sud e Sud-Isole in particolare in matematica. Soprattutto in Lettura emerge un cambiamento nell'andamento dal 2000 al 2009: i risultati sono in calo fino al 2006 e poi c'è un netto recupero.

I tre grafici seguenti mostrano il trend nelle tre aree di contenuto Lettura, Matematica e Scienze. I riferimenti iniziali sono il 2000 per Lettura, il 2003 per Matematica e il 2006 per Scienze in quanto la standardizzazione a 500 della media viene fatta nell'anno in cui l'indagine principale riguarda quell'ambito.

Dall'analisi dei dati regionali relativi alla matematica emerge che l'Emilia-Romagna si conferma come una delle migliori regioni italiane rispetto al punteggio ottenuto sulla scala complessiva di matematica; in particolare i suoi licei risultano essere le scuole che raggiungono il punteggio più elevato di competenza matematica.

Nella rilevazione del 2009, però, è aumentata notevolmente la differenza tra i punteggi ottenuti dai maschi e quelli ottenuti dalle femmine, a vantaggio dei primi, in particolare nei licei.

Emerge inoltre un incremento della dipendenza dei risultati di matematica dall'indice *Escs*[2], quindi a fronte di un aumento dell'efficacia del sistema scolastico emiliano-romagnolo si registra una diminuzione dell'equità.

---

[2] *Escs* è un indice dello status socioeconomico e culturale calcolato sulla base di parametri internazionali condivisi e riconosciuti dai paesi europei.

Figura 1 - Trend 2000-2009 Lettura

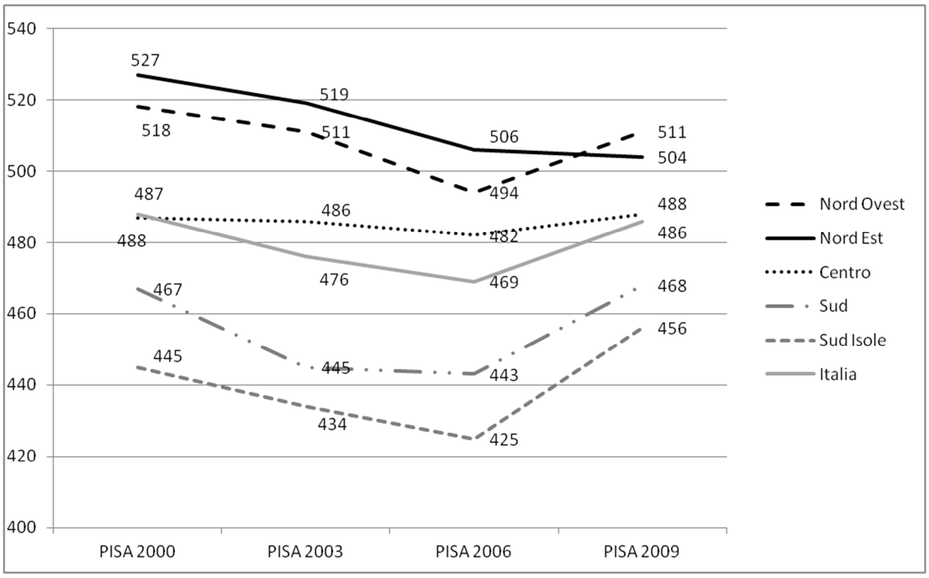


Figura 2 - Trend 2003-2009 Matematica

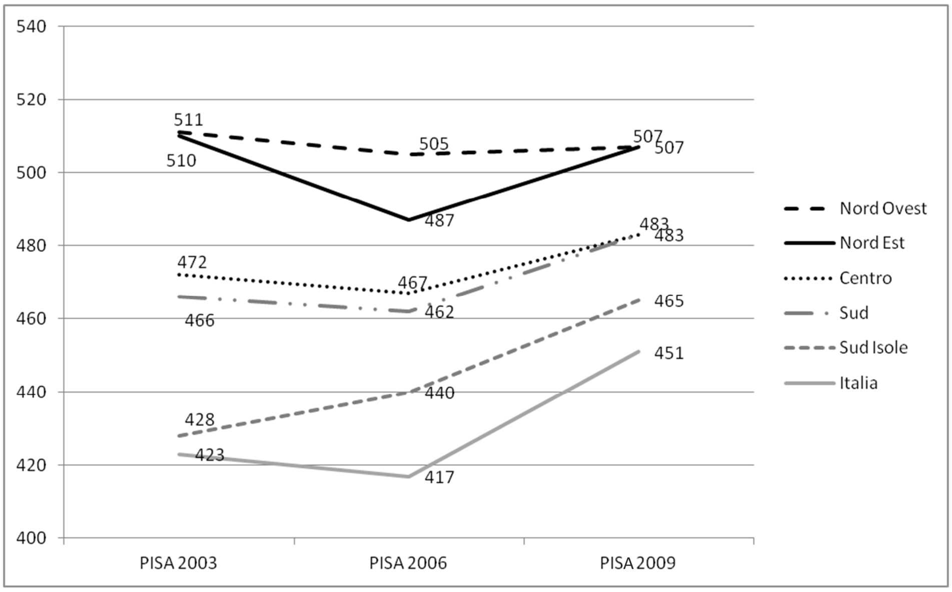
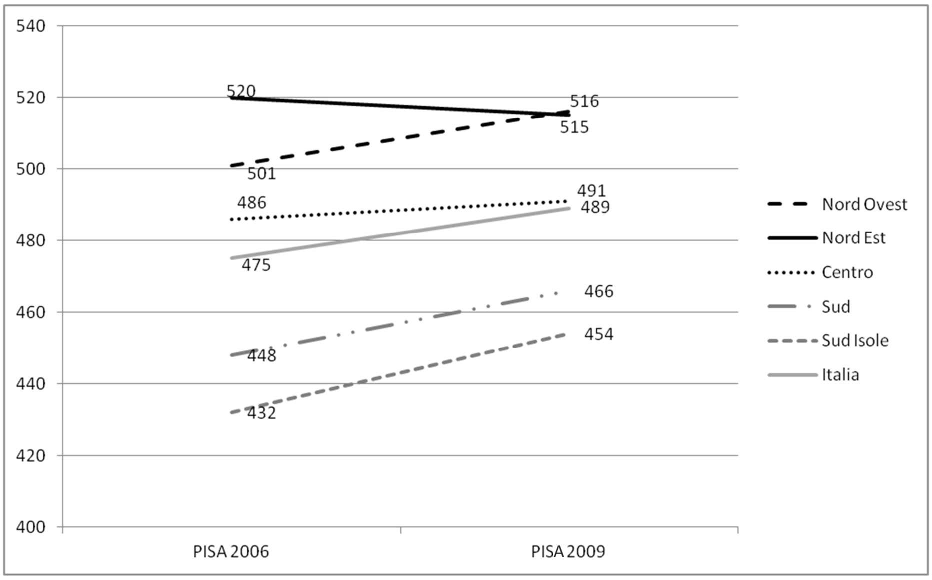


Figura 3 - Trend 2006-2009 Scienze



Il Servizio Nazionale di Valutazione e le prove di matematica[3]

Nel primo intervento (2008) l'attenzione è stata focalizzata sulla Prova Nazionale all'esame di stato finale della scuola secondaria di I grado, prima rilevazione del Servizio Nazionale di Valutazione avvenuta a giugno 2008.

La prova, parte integrante dell'esame, era formata da 15 quesiti di Italiano e 22 di Matematica di diverse tipologie ma prevalentemente a scelta multipla. Gli ambiti di contenuto sono stati quelli previsti dalle *Indicazioni nazionali per il I ciclo*: *Numeri; Spazio e figure; Relazioni e funzioni; Misure, dati e previsioni.*

Le prove sono state somministrate e corrette in ogni scuola dalla Commissione d'esame. Le analisi dei risultati sono state sviluppate secondo due modalità:

- metà settembre 2008 - Rapporto nazionale che analizza i dati complessivi del campione stratificato rispetto alle 5 macro-aree (240 scuole);
- tardo autunno 2008 - Restituzione *riservata* alle singole scuole (mediante password) dei dati disaggregati per classe, genere, origine e regolarità del percorso scolastico. Restituzione pubblica dei dati aggregati a livello regionale.

[3] Sintesi degli interventi: "La Prova Nazionale di Matematica a.s. 2007-2008", "Le rilevazioni Invalsi per il I e il II ciclo", "Analisi di prove di rilevazione: un'occasione per riflettere" e "Quesiti delle prove e competenze: una pista di lavoro".

Tabella 2 - Risultati complessivi (campione)

	MATEMATICA			*ITALIANO*								
				Prova complessiva			*Comprensione del testo*			*Grammatica*		
	Limite inf.	*Media*	*Limite sup.*	*Limite inf.*	*Media*	*Limite sup.*	*Limite inf.*	*Media*	*Limite sup.*	*Limite inf.*	*Media*	*Limite sup.*
Nord	52,7	*54,2*	55,7	64,8	*66,4*	67,9	69,5	*71,0*	72,5	57,3	*59,4*	61,5
Centro	52,7	*55,8*	58,9	65,2	*67,6*	70,0	70,7	*72,5*	74,4	56,7	*60,2*	63,7
Sud	51,0	*53,5*	55,9	65,2	*67,4*	69,5	67,6	*69,6*	71,5	60,8	*64,0*	67,2
Italia	52,8	***54,2***	55,6	66,0	***67,0***	68,0	69,9	***70,8***	71,7	59,8	***61,2***	62,7

Sono state poi illustrate alcune tabelle e alcuni grafici tratti sia dal rapporto nazionale sia dai dati restituiti alle singole scuole.

Di particolare rilevanza è stata l'analisi e discussione di quesiti tratti dalla prova non tanto in termini di risultati ma come occasione di riflessione sulle indicazioni didattiche, in particolare a partire da quali sono stati gli errori più diffusi e perché quegli errori e non altri. In sostanza è stato proposto agli insegnanti di utilizzare la prova per una riflessione sulle proprie prassi didattiche e sui processi cognitivi dei propri studenti; ciò poi è stato sviluppato nei seminari provinciali.

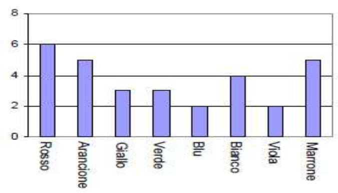
A titolo di esempio si riportano l'analisi e il confronto fra un quesito Pisa e uno della Prova nazionale.

Quesito Pisa (anno 2003)

CARAMELLE COLORATE

Domanda 1: CARAMELLE COLORATE M467Q01

La mamma permette a Roberto di prendere una caramella da un sacchetto. Roberto non può vedere le caramelle. Il seguente grafico mostra il numero di caramelle di ciascun colore che ci sono nel sacchetto.



Qual è la probabilità che Roberto prenda una caramella di colore rosso?

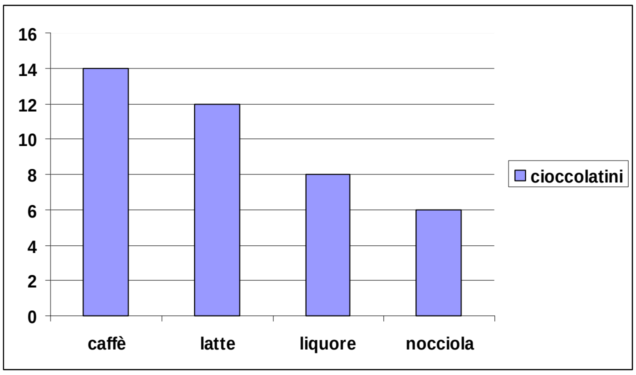
A 10%
B 20%
C 25%
D 50%

Il quesito è classificato da Pisa di ambito *Dati e previsioni* e di livello di difficoltà 4 (su 6). Il 33,7% degli studenti italiani ha risposto correttamente a fronte di una media Ocse del 49,7%.

Per rispondere correttamente gli studenti dovevano saper leggere e interpretare un grafico, conoscere la definizione di probabilità e saper passare dalla frazione alla percentuale (6/30 = 20%).

Quesito della Prova Nazionale Invalsi 2008

C7. Il grafico mostra il numero dei cioccolatini di diversi gusti contenuti in una scatola.



Prendendo un cioccolatino a caso, qual è la probabilità di scegliere un cioccolatino alla nocciola?

A.	$\frac{6}{14}$	C.	$\frac{6}{34}$
B.	$\frac{6}{40}$	D.	$\frac{1}{4}$

A questa domanda il 66,6% degli studenti ha risposto correttamente.

Per rispondere correttamente gli studenti dovevano sapere leggere e interpretare un grafico, conoscere la definizione di probabilità e riconoscere la frazione corretta.

Il quesito Invalsi era più semplice del quesito Pisa, in quanto non si richiedeva di saper passare dalla frazione alla percentuale, ma molto simile. I risultati, tenuto anche conto che a Pisa hanno partecipato studenti con mediamente due anni in più di scolarizzazione, sono stati decisamente migliori.

Una delle ragioni di questa differenza può essere il fatto che nel 2003 Statistica e Probabilità non facevano parte delle prassi didattiche della stragrande maggioranza dei bienni di scuola secondaria di II grado e sembra che gli studenti, non avendo affrontato questi argomenti per due anni, abbiano anche dimenticato ciò che sapevano alla fine della scuola secondaria di I grado. Molta attenzione è poi stata dedicata all'analisi degli errori, che è spesso più significativa dei risultati.

L'attenzione, inoltre, è stata rivolta agli aspetti più importanti del *Quadro di Riferimento delle prove Invalsi* (QdR) che definisce gli ambiti, i processi e i compiti delle prove e che è indirizzato agli autori dei quesiti, ai gruppi che predispongono i fascicoli, a tutto il personale della scuola. Il QdR è il frutto di uno studio articolato su più anni in cui sono stati valutati, anche in chiave comparativa, sia la normativa attualmente vigente in Italia circa i contenuti dell'insegnamento primario e secondario sia i quadri di riferimento prodotti negli ultimi anni dalla IEA e dall'Ocse e, non da ultimo, la prassi didattica.

In particolare i processi sono stati illustrati e discussi al fine di costruire le 'piste di lavoro' per gli insegnanti che hanno partecipato al progetto EM.MA.. Le piste individuate riguardavano in particolare due processi, tratti dal QdR, ritenuti meno presenti nelle prassi didattiche dell'intero I ciclo:

- Processo 3 - Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e saper passare da una all'altra.
- Processo 6 - Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico: congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare.

Infine, alla vigilia della prima prova nella classe seconda della scuola secondaria di II grado (2011) è stato fatto un primo bilancio delle rilevazioni SNV.

È stato sottolineato che la finalità ultima della misurazione degli apprendimenti risiede nel fornire alle singole scuole uno strumento di diagnosi per migliorare il proprio lavoro. Infatti i dati appartengono alla singola scuola alla quale vengono restituiti nel modo più disaggregato possibile, cioè secondo la distribuzione delle risposte domanda per domanda. Affinché le scuole possano utilizzarli a fini diagnostici, l'Invalsi provvede a restituire i risultati della misurazione degli apprendimenti sia in forma grezza, sia depurati dai dati di contesto e da tutti quegli elementi estranei all'attività della scuola (*cheating*), che possono influenzare il profitto degli alunni.

La rilevazione SNV è fatta utilizzando prove oggettive standardizzate, cioè prove costruite in modo che la loro correzione possa avvenire secondo modalità riproducibili e non dipendenti dal soggetto che effettua la correzione stessa. La loro costruzione richiede un grosso sforzo per individuare le domande più adeguate sia in termini di rispondenza al QdR sia rispetto alla formulazione e alla capacità misuratoria dal punto di vista tecnico-statistico.

Per realizzare il difficile compito di reperire un grosso numero di domande di elevata qualità, l'Invalsi si avvale della fondamentale collaborazione di oltre 200 docenti ed esperti provenienti dal mondo della scuola e dell'università. Dopo che gli autori hanno inviato all'Invalsi le loro proposte di quesiti, comincia il processo di costruzione vera e propria delle prove. Essa si articola in diverse fasi, ognuna delle quali caratterizzata da aspetti differenti.

Un gruppo di esperti (docenti di quel livello scolare) effettua una prima selezione al fine di predisporre i fascicoli da sottoporre a pre-test. L'adeguatezza delle prove costruite nella fase I viene valutata mediante il pre-test somministrato a un campione di allievi con caratteristiche analoghe a quelle di coloro che dovranno svolgere le prove SNV. In pratica il *field trail* viene realizzato durante l'anno scolastico precedente a quello dello studio principale.

I dati raccolti mediante il pre-test vengono analizzati mediante l'applicazione di appropriati modelli statistico-psicometrici sostanzialmente ascrivibili alla cosiddetta teoria classica dei test e alla teoria della risposta (*Item Response Theory*).

La capacità misuratoria di ogni domanda viene analizzata mediante modelli statistici in grado di stabilire la coerenza di ciascuna opzione di risposta rispetto al costrutto oggetto di valutazione, rispetto al livello di abilità/competenza del rispondente e rispetto alla difficoltà specifica della domanda stessa.

Sulla base delle informazioni tratte dalle analisi quantitative dei dati del pre-test viene condotta un'ulteriore analisi qualitativa delle domande testate. Durante questa fase vengono selezionate in via definitiva le domande che saranno inserite nelle prove somministrate a tutti gli studenti.

Dopo che ciascuna domanda è stata analizzata sotto il profilo quali-quantitativo, vengono composti i fascicoli che saranno somministrati durante la rilevazione principale. Essi devono essere strutturati in funzione dei tempi di compilazione, stimati sulla base dei risultati del pre-test e del livello complessivo di difficoltà, dati i vincoli di composizione definiti dai quadri di riferimento per la valutazione.

La composizione di una prova standardizzata rivolta all'accertamento su scala nazionale dei livelli di apprendimento non risponde agli stessi criteri che guidano la costruzione delle verifiche di classe.

Una prova standardizzata nazionale deve essere in grado di misurare i risultati degli studenti all'interno di una scala di abilità/competenza molto lunga, dai livelli più bassi a quelli di eccellenza. È quindi normale che all'interno di una prova di questo genere vi siano anche dei quesiti molto difficili ai quali solo una piccola percentuale di allievi è in grado di rispondere.

A conclusione si riporta il prospetto riassuntivo delle caratteristiche delle prove di Matematica dell'anno scolastico 2011-12.

Classe e durata	*Ambiti di contenuto*	*N. domande per ambito*	*N. item per ambito*	*N. item per tipologia*
2ª primaria 45 minuti	- Numeri - Spazio e figure - Dati e previsioni	13 5 2	18 7 7	Scelta multipla: 15 Scelta multipla complessa: 0 Aperta a risposta univoca: 17 Aperta a risposta articolata: 0
	Totale	*20*	*32*	
5ª primaria 75 minuti	- Numeri - Spazio e figure - Dati e previsioni - Relazioni e funzioni	11 8 7 7	14 9 17 10	Scelta multipla: 15 Scelta multipla complessa: 8 Aperta a risposta univoca: 18 Aperta a risposta articolata: 9
	Totale	*33*	*50*	
1ª secon- daria I grado 75 minuti	- Numeri - Spazio e figure - Dati e previsioni - Relazioni e funzioni	9 10 5 7	13 13 10 13	Scelta multipla: 22 Scelta multipla complessa: 0 Aperta a risposta univoca: 21 Aperta a risposta articolata: 6
	Totale	*31*	*49*	
3ª secon- daria I grado 75 minuti	- Numeri - Spazio e figure - Dati e previsioni - Relazioni e funzioni	8 7 5 5	16 11 9 10	Scelta multipla: 20 Scelta multipla complessa: 4 Aperta a risposta univoca: 19 Aperta a risposta articolata: 3
	Totale	*25*	*46*	
2ª secon- daria II grado 90 minuti	- Numeri - Spazio e figure - Dati e previsioni - Relazioni e funzioni	12 8 5 5	17 12 14 11	Scelta multipla: 21 Scelta multipla complessa: 13 Aperta a risposta univoca: 13 Aperta a risposta articolata: 7
	Totale	*30*	*54*	

PROVE INVALSI. LA RICERCA SULLE COMPETENZE MATEMATICHE: DALLA VALUTAZIONE AL CURRICOLO[1]

Giorgio Bolondi

I dubbi dei docenti

L'introduzione nelle scuole delle *Prove Invalsi* ha stimolato un intenso dibattito tra gli insegnanti e, in una certa misura, anche tra i ragazzi. Da molti queste prove vengono vissute come un'ingerenza in quello che è uno dei compiti fondamentali dell'insegnante, *valutare* gli studenti. Questo è un fatto molto complesso, che accompagna giorno per giorno il percorso scolastico e, in misura molto più profonda di quanto non venga abitualmente percepito, lo condiziona e lo influenza. Come può 'una prova a crocette', pensata chissà dove, dare informazioni che l'insegnante non ha già? Non è che poi queste prove servono per valutare l'insegnante, invece che l'allievo?

Perché l'Invalsi manda nelle scuole le prove

L'Invalsi agisce in base a precise direttive di legge: non è quindi l'Istituto che decide, ad esempio, che la prova nazionale deve pesare nella valutazione finale al termine del I ciclo né quale peso deve avere. Lo scopo delle Prove Invalsi è fornire strumenti per la valutazione *della Scuola* e *per le scuole*. La distinzione è importante perché dietro questa parola – *valutazione* – ci sono almeno due significati distinti e molto differenti, spesso confusi: la *valutazione del sistema* e la *valutazione degli studenti*. A questi va aggiunto un terzo significato, quello forse più presente nell'immaginario (e nelle paure) degli insegnanti: la *valutazione degli operatori scolastici* (docenti, dirigenti, scuole...). È bene fare chiarezza su cosa possono e vogliono valutare le prove Invalsi.

Ogni sistema scolastico, come ogni sistema complesso moderno, ha bisogno di monitorare costantemente i propri risultati: ha bisogno di dati sulla base dei quali individuare (al di là delle percezioni individuali degli operatori) i propri punti di forza e quelli di debolezza, capire quali opportunità di miglioramento si presentano nel tempo e quali pericoli siano da evitare.

Quasi tutti i paesi sviluppati hanno costituito, o stanno costituendo, dei sistemi per la valutazione della scuola. È un processo questo molto lungo, che richiede energie e risorse; in Italia siamo solo all'inizio. Un principio elementare di buona gestione vuole che questi sistemi siano affidati a un organismo in qualche modo *esterno* alla scuola stessa.

---

1 22 aprile 2013.

Il primo scopo dell'Invalsi è quindi quello di rilevare dati e fornire strumenti per la valutazione del sistema scolastico nel suo complesso. Questi dati dovrebbero permettere ai decisori politici e amministrativi, e più in generale ai cittadini, di stabilire, sulla base di informazioni per quanto possibile oggettive, generali e affidabili, se la scuola italiana sta realizzando i propri obiettivi.

I dati che l'Invalsi raccoglie e analizza sono di natura molto diversa (dalle dotazioni delle scuole ai risultati dei ragazzi nelle valutazioni internazionali a come vengono assegnati i voti negli scritti dell'esame di maturità...), ma tra di essi hanno un'importanza cruciale quelli relativi agli *apprendimenti* dei ragazzi. Non c'è nessun dubbio che l'efficacia di un sistema scolastico si misura soprattutto da quello che i ragazzi apprendono e da come lo sanno spendere fuori dalla scuola.

Un obiettivo del Servizio Nazionale di Valutazione è quindi quello di fornire una *fotografia* per quanto possibile accurata degli apprendimenti dei ragazzi, come strumento fondamentale per una valutazione di sistema. Il Servizio, per ora, valuta gli apprendimenti in Italiano e in Matematica nelle classi seconda e quinta della scuola primaria, prima e terza della scuola secondaria di I grado (quest'ultima, attraverso la prova nazionale di cui si parlerà più avanti) e seconda della scuola secondaria di II grado. In prospettiva, valuterà anche la classe quinta della scuola secondaria di II grado.

Per fare questo potrebbe bastare una *valutazione* campionaria, che avrebbe il vantaggio di essere più economica e più controllata (e quindi accurata). L'obiettivo finale della società, però, è migliorare la scuola, e questo passa attraverso l'azione di ogni singolo insegnante, che cerca costantemente di migliorare la propria azione didattica.

La valutazione è quindi censuaria per fornire a ogni insegnante uno strumento di conoscenza e di valutazione degli apprendimenti dei propri ragazzi, che gli permetta di metterli a confronto con quelli di popolazioni di riferimento comparabili (ad esempio per area geografica). Ogni insegnante somministra ai propri studenti la prova Invalsi (e la corregge) per avere, lui e non altri, un dato su cui riflettere e da utilizzare per migliorare.

Perché la prova nazionale 'fa media'

In particolare, la prova Invalsi inserita nell'esame di Stato conclusivo del I ciclo *entra* nella valutazione individuale di ciascun allievo. Questo ha generato molte perplessità e diverse polemiche, e d'altra parte risponde a un'esigenza molto precisa, che è anche un dovere verso i nostri ragazzi.

La valutazione dei ragazzi cambia profondamente natura lungo tutto il percorso scolastico: si passa da una valutazione quasi completamente *soggettiva* all'inizio del I ciclo a una totalmente *oggettiva* negli studi universitari. Questo vuol dire che la valutazione del docente nella scuola primaria tiene conto prioritariamente di fattori legati ai soggetti: prima di tutto del bambino con le sue caratteristiche personali, la sua storia personale e familiare, il suo impegno e partecipazione. Ma anche del soggetto-insegnante, che ovviamente basa la propria valutazione su quello che ha effettivamente fatto con la classe, e non darebbe mai 'il voto' su argomenti che non ha sviluppato.

All'estremo opposto, si pretende che la valutazione (che ha anche un valore amministrativo e certificativo, nella nostra legislazione) abbia un significato per quanto possibile oggettivo: quando andiamo dal medico e vediamo il suo certificato di laurea con un voto, speriamo che questo sia stato assegnato in base a una valutazione delle conoscenze che ha acquisito e alle competenze che ha maturato, e non perché ha dimostrato impegno e buona volontà, o in considerazione di particolari situazioni di disagio...

L'esame 'di terza media' è uno snodo importante, e non a caso adesso è un esame di Stato. Il **voto** che un ragazzo ottiene è spesso determinante nella scelta degli studi successivi, e comunque diverse analisi (ad esempio, la ricorrezione effettuata dall'Invalsi degli scritti dell'esame di Stato del II ciclo) hanno mostrato che è un indicatore molto forte della possibilità di successo in questi studi. L'idea di fondo è che in questo snodo il ragazzo abbia la necessità, e anche il diritto, di sapere per quanto possibile *oggettivamente* quali apprendimenti ha conseguito, anche attraverso un confronto con i risultati dei suoi coetanei. Questo è possibile solo in una misura limitata, è ovvio, e solo attraverso una prova esterna. È quindi naturale che un ragazzo, per quanto preparato su tutto quello che l'insegnante ha svolto, possa incappare in una domanda inattesa (che comunque non può mai essere al di fuori delle *Indicazioni nazionali* di legge).

Quale matematica viene valutata dalle prove Invalsi

L'Invalsi ha costituito un gruppo di lavoro a far parte del quale ha chiamato insegnanti, dirigenti, ispettori, ricercatori, accademici, con l'incarico di redigere un quadro di riferimento per il Servizio Nazionale di Valutazione.

Questo quadro di riferimento è, in definitiva, il documento che definisce *quale* matematica viene valutata dalle prove e *come* viene valutata. Vuole rappresentare un punto di confronto tra diverse esperienze e di convergenza tra le differenti opinioni su quali devono essere i risultati del lavoro di insegnamento e apprendimento della matematica nelle nostre scuole, ed è costruito intorno all'idea che la matematica realizza i suoi diversi obiettivi (sia di ordine strumentale che di ordine formativo) in quanto disciplina con una sua specifica identità culturale. È un documento in continua evoluzione, che viene modificato in base ai dati ricavati dalle indagini via via effettuate, alle riflessioni che le prove stimolano tra gli insegnanti e in generale gli operatori, alle nuove consegne e richieste che vengono date al servizio di valutazione.

Il quadro di riferimento individua due dimensioni lungo le quali costruire i quesiti:

a. i ***contenuti*** matematici, suddivisi nei quattro grandi ambiti *Numeri*, *Spazio e figure*, *Relazioni e funzioni*, *Misure, Dati e previsioni*[2];
b. I ***processi coinvolti***.

[2] Il nucleo *Relazioni e funzioni* non viene valutato per la seconda primaria.

Ogni quesito viene quindi classificato secondo queste due dimensioni per permettere di organizzare e aggregare i risultati. Questo dovrebbe aiutare gli insegnanti a individuare meglio i punti di forza e di debolezza dei propri allievi. I processi presenti nel QdR, con qualche differenza tra il I e il II ciclo, sono attualmente:

1. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*);

2. conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*);

3. conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e saper passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica...*);

4. saper risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (*individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio, sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo…*);

5. saper riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (*saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,* …);

6. acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare*, *giustificare*, *definire, generalizzare...*);

7. utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale *(descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni...*);

8. saper riconoscere le forme nello spazio (*riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni...*).

Il quadro di riferimento è dunque uno strumento in evoluzione, nel senso che sono previsti periodici aggiornamenti, anche in base all'esperienza maturata sul campo e alle indicazioni provenienti dal mondo della scuola.

Come vengono preparate le prove

Una delle domande più frequenti, che spesso ritorna sullo sfondo delle lamentazioni degli insegnanti e degli studenti, è: "Ma chi prepara le prove?".

Come è ovvio, non c'è un 'cervellone' che pensa le prove. Le singole domande e le prove nel loro insieme sono il risultato di un processo che dura oltre un anno, che si sviluppa in diverse tappe e che coinvolge competenze molto diverse.

Le domande sono proposte da *autori,* quasi tutti insegnanti in servizio che l'Invalsi individua e per i quali organizza periodicamente seminari di formazione; un gruppo abbastanza folto in continua crescita. I seminari hanno lo scopo di approfondire e discutere le caratteristiche delle prove sia dal punto di vista dei contenuti che da quello della forma.

È evidente che è molto diverso scrivere una domanda per i propri studenti, con i quali ogni insegnante condivide un 'lessico familiare' nel quale i termini, i costrutti, i modi di proporre i testi, le figure, gli schemi hanno un significato che è costruito nel corso del tempo, e preparare una domanda che dovrà essere sottoposta a 600.000 ragazzi di quasi 30.000 diverse classi, che hanno realizzato percorsi con insegnanti molto diversi.

Gli autori lavorano sulla base del quadro di riferimento, proponendo domande con assoluta libertà nella scelta dei contenuti, della forma, dei processi coinvolti – il gruppo di lavoro dell'Invalsi può sollecitare domande con particolari caratteristiche quando se ne presenti la necessità. Tutte le domande vengono classificate in base all'ambito, ai processi, alla difficoltà presunta, ai livelli scolastici in cui possono venire proposte (eventualmente con opportune varianti).

Questo costituisce un archivio di domande dalle quali il gruppo di lavoro attinge per assemblare fascicoli-test che siano equilibrati e completi (rispetto alle diverse dimensioni della classificazione: ambito, processo e difficoltà). In questa fase le domande subiscono, se necessario, una prima riscrittura (che serve a migliorare il linguaggio o la presentazione, e può trasformare una domanda aperta in una a risposta chiusa, o viceversa, o modificare la situazione o la domanda) e può succedere che una stessa domanda venga presentata in diverse varianti.

I fascicoli (2 o 3 diversi per ogni livello scolastico) vengono testati su **classi campione**; per fare questo, è necessario testare le domande con un anno di anticipo: le domande per la II primaria per l'anno x devono essere provate in una seconda primaria dell'anno (x-1).

Le risposte vengono analizzate dal punto di vista statistico (*item response theory*) per mettere a fuoco il ruolo dei distrattori, per verificare sul campo l'effettiva difficoltà e per vedere la coerenza di ciascuna domanda rispetto all'insieme della prova.

In parallelo *all'****analisi statistica*** viene sviluppata un'***analisi didattica*** per comprendere le difficoltà incontrate dai ragazzi, le motivazioni delle risposte sbagliate, i percorsi possibili utilizzati dagli studenti per l'individuazione della risposta corretta, e per verificare la coerenza della domanda con i curricoli reali. I commenti e le osservazioni degli insegnanti delle classi campione e degli osservatori Invalsi permettono anche di individuare eventuali debolezze del testo, errori o ambiguità di formulazione. Molte domande vengono così cassate; altre vengono riformulate o modificate; se necessario ne vengono aggiunte.

Se le modifiche sono sostanziali si procede a una nuova, limitata prova sul campo. A tutte le fasi del lavoro partecipa un esperto di italiano, per garantire la massima accuratezza e scioltezza della lingua utilizzata. L'obiettivo è eliminare per quanto possibile ogni ambiguità dal testo, nella consapevolezza che una qualunque debolezza o imprecisione verrebbe amplificata dal grande numero di allievi e insegnanti che dovranno leggerlo. Succede così talvolta che una domanda interessante non arrivi a essere utilizzata perché non si riesce a trovare una formulazione soddisfacente.

Dalle domande così testate e analizzate vengono scelte le domande per il fascicolo della prova nazionale e viene deciso l'ordine di presentazione; le figure e le tabelle vengono eventualmente rifatte dal servizio tecnico dell'Invalsi.

Una volta che i fascicoli sono realizzati, si procede a una nuova lettura complessiva – se necessario coinvolgendo anche persone che non hanno partecipato alla compilazione – per individuare eventuali errori o imprecisioni che possono essere rimasti nei testi. A questo punto si procede a realizzare la griglia di correzione e la classificazione definitiva delle domande. Dopo un anno di lavoro i fascicoli sono pronti per essere 'somministrati' (questa parola non gradevolissima è il termine tecnico) ai ragazzi: la vera vita delle domande comincia a questo punto.

Come vengono somministrate le prove

Lasciamo per un momento da parte la prova nazionale dell'esame di Stato conclusivo del I ciclo di istruzione, che ha scopi e caratteristiche diverse dalle altre. Le prove del Servizio Nazionale di Valutazione (SNV) sono censuarie a livello di scuola e di studente: vale a dire, le fanno tutti gli studenti di tutta Italia, a differenza delle valutazioni internazionali (Ocse-Pisa e Iea-Timms), che sono campionarie.

Ogni insegnante dispone quindi di informazioni sulle proprie classi, che può confrontare con i risultati complessivi o con popolazioni studentesche di riferimento di vario tipo (ad esempio della stessa regione). Non è ovviamente possibile (e neanche auspicabile, soprattutto per i bambini più piccoli) che una somministrazione di queste dimensioni sia realizzata da persone esterne alle scuole, per cui ogni dirigente è responsabile della correttezza dell'effettuazione della prova.

In altre parole, non può escludere a priori che in determinate situazioni gli studenti possano copiare, ricevere aiuti dagli insegnanti o comunque svolgere la prova in maniera non regolare (circostanze che comunque non sembrano essere particolarmente educative). Allo stesso tempo, in un campione di scuole selezionato con criteri di rappresentatività statistica la somministrazione avviene con il controllo di un osservatore esterno: i risultati di queste scuole, aggregati secondo diversi criteri, costituiscono il benchmark, il parametro di riferimento.

Ogni insegnante, in definitiva, sa in quali condizioni i suoi allievi hanno sostenuto la prova, e sa quindi che valore hanno i risultati ottenuti. Il campione predisposto dall'Invalsi ha lo scopo di permettere al singolo insegnante un confronto, anche per poter intervenire consapevolmente, se necessario, sulla propria azione didattica.

Come vengono analizzati, a livello di sistema, i risultati?

L'Invalsi analizza i risultati della rilevazione del Servizio Nazionale di Valutazione dal punto di vista statistico e fornisce questi dati ai propri esperti e al mondo della scuola perché vengano fatte analisi di tipo didattico. I dati vengono raccolti in un *Rapporto* annuale; le analisi si sviluppano nel tempo, anche con comparazioni tra rilevazioni successive.

Come possono essere utilizzati, dagli insegnanti e dalle scuole, i risultati

Ogni insegnante può contestualizzare i risultati delle prove Invalsi attraverso la conoscenza della propria scuola e dei propri allievi, e leggerli nel modo più efficace. Può così individuare ambiti di debolezza, nei quali il percorso può venire rafforzato (ad esempio, introducendo nuove modalità di valutazione, o rimettendo a fuoco gli obiettivi), e punti di forza, sui quali far leva per stimolare l'eccellenza o favorire il recupero di studenti in difficoltà.

Può anche individuare, grazie alla classificazione delle domande, eventuali *processi* nei quali i suoi allievi (o una parte di essi) incontrano particolari difficoltà. Le prove Invalsi sono, in definitiva, uno strumento *in più* in mano all'insegnante – uno strumento che ha il vantaggio di fornire dati confrontabili con quelli di un campione, e quindi di restituire oggettività alla valutazione del docente. Non dobbiamo dimenticare che nella percezione dei nostri studenti la valutazione è considerata quasi completamente dipendente dall'insegnante, e indipendente dalle reali conoscenze acquisite. L'Invalsi dovrebbe contribuire a riconquistare una credibilità complessiva.

Un esempio

Le prove Invalsi possono anche fornire indicazioni molto puntuali. Ad esempio aiutano a individuare e quantificare la presenza di *misconcezioni*. Riportiamo qui un esempio, tratto dalla rilevazione per la quinta primaria del 2008-09.

Nella domanda 11 era chiesto di confrontare dei numeri decimali.

Domanda 11 – Per ognuna delle seguenti disuguaglianze, indica se è vera o falsa

	Vero	*Falso*
a. 2,4 < 2,48	□	□
b. 2,5 < 2,49	□	□
c. 2,91 > 3	□	□
d. 3,05 > 3,043	□	□

Riportiamo, dal rapporto dell'Invalsi, la distribuzione delle risposte date dai bambini.

Tabella 3- Distribuzione percentuale nelle risposte alle domande

Italia				
Ambito di valutazione	*Domanda*	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
			Vero	*Falso*
Numeri	D11a	1,1	82,1	16,8
Numeri	D11b	1,2	36,1	62,6
Numeri	D11c	1,2	20,8	78,0
Numeri	D11d	1,3	63,7	35,1

Come si vede, c'è una differenza netta di *performance* tra gli item *a* e *c* (circa l'80% di riposte corrette) e gli item *b* e *d* (circa il 63% di risposte corrette). C'è quindi una fascia di bambini, quasi il 20%, che sembra non riconoscere il valore delle cifre *dopo* la virgola, accontentandosi di confrontare le parti decimali dei numeri come se fossero numeri interi: siccome 5 < 49, allora 2,5 < 2,49.

Questo comportamento è ben conosciuto e studiato dagli esperti di didattica; gli esiti di questa domanda ne misurano la diffusione. In *tutte* le regioni italiane, indipendentemente dai risultati complessivi degli allievi (che possono essere molto variabili), la differenza tra le risposte corrette agli item 11a/11c e 11b/11d si attesta intorno al 20%: questa difficoltà specifica (confermata anche dai risultati di altre domande) interessa quindi circa un bambino su cinque.

Il singolo insegnante può essere portato a sottovalutare comportamenti come questo, attribuendoli a distrazione o leggerezza, e pensare che sono facilmente correggibili. La prova Invalsi serve anche per avere una misura della dimensione reale del fenomeno.

2002-2014: UN DECENNIO DI PROVE INVALSI DI MATEMATICA NEL CONTESTO DELLA SCUOLA ITALIANA[1]

Paolo Boero

Fra le riflessioni, gli approfondimenti e i dibattiti intorno all'evoluzione delle prove Invalsi dopo un decennio di attività, ecco un'analisi legata ai fenomeni positivi che si stanno innescando nella scuola. Parallelamente ai cambiamenti nella qualità delle prove (di matematica) preparate e somministrate, sono molti gli insegnanti che si interrogano oggi sulle ragioni delle difficoltà dei loro allievi e che prestano più attenzione alle Indicazioni Nazionali per il Curriculum, alla scelta dei libri di testo e degli esercizi e attività in classe coerenti con esse.

Le prove e la loro evoluzione in questi ultimi dieci anni vengono qui analizzate secondo tre tipi di criteri:

- *significatività MATEMATICA*, anche in relazione alla prosecuzione degli studi fino alla maturità e oltre (a Ingegneria, Architettura, Economia, Fisica, Biologia, ecc.);
- *significatività OPERATIVA*, per l'uso della matematica fuori della scuola e dopo la scuola, da parte di tutti gli allievi (con particolare attenzione per quelli che non proseguiranno gli studi oltre l'obbligo e per quelli che li interromperanno prima!);
- *significatività FORMATIVA, per tutti,* come contributo allo sviluppo equilibrato di flessibilità, creatività e rigore intellettuale.

Gli esempi che seguono prendono come riferimento *le prove per la 'terza media'* (per il loro effetto nelle scuole), con attenzione alle competenze per affrontarle e alla loro significatività per la matematica e per la formazione culturale del cittadino.

[1] Sintesi della relazione di Paolo Boero al convegno 4-5 dicembre 2014 "2002-2014: 10 anni di prove Invalsi"- Roma, a cura di Rossella Garuti. La relazione è disponibile in: *http://www.invalsi.it/invalsi/doc_eventi/12-2014/4/P_Boero.pdf.*

Prova Invalsi 2002, classe 3ª scuola secondaria di I grado (Progetto Pilota)

Quesito sullo schema della ***proporzionalità***: tema importante, centrale nei programmi del 1979 e in tutte le *Indicazioni nazionali per il curricolo*.

5. Se 7 sta a 13 come x sta a 52, qual è il valore di x?
A. 7 B. 13 C. 28 D. 364

Significatività matematica: scarsa (schema utile, ma senza senso se non collegato a un problema da risolvere).

Significatività operativa: assai scarsa, in quanto nelle professioni e nella vita quotidiana la difficoltà vera consiste nel 'matematizzare' una situazione reale; quindi non viene accertato il possesso di alcuno strumento per l'autonomia degli allievi di livello basso.

Significatività formativa: nulla, in quanto si tratta di applicare meccanicamente uno schema rigido.

Autorizzare/incentivare, con il test nazionale, domande del genere nelle prove delle scuole può produrre effetti inevitabili quali un'immagine distorta della matematica e, per i ragazzi più irrequieti, un accresciuto odio verso la matematica stessa.

Prova Invalsi 2013, classe 3ª scuola secondaria di I grado – esame di Stato

Quesito sulla proporzionalità affine al precedente.

D27. **Nella scuola "Nino Bixio" ci sono 600 studenti e un insegnante ogni 15 studenti.**

a. **Quale proporzione permette di trovare il numero x degli insegnanti?**

A. ☐ x : 15 = 1 : 600
B. ☐ 15 : 1 = x : 600
C. ☐ 1 : 15 = x : 600
D. ☐ x : 1 = 15 : 600

b. **Nella scuola "Giuseppe Garibaldi", con lo stesso numero di studenti della "Nino Bixio", il numero degli insegnanti è la metà. Quanti studenti ci sono per ogni insegnante?**

Risposta: ....

Significatività matematica: discreta per a - schema, tuttavia *obbligato*, da individuare tra quelli proposti riferendolo a una situazione; *buona* per b - padronanza della proporzionalità inversa riferita a una situazione peraltro molto semplice.

Significatività operativa: limitata per a (per via della scelta tra schemi *preassegnati*); *buona* per b.

Significatività formativa: discreta (ma il quesito a- appare 'scolastico' e vincola a un unico tipo di ragionamento; meglio b).

Prova Invalsi 2002, classe 3ª scuola secondaria di I grado (Progetto Pilota)

Quesito di *Matematizzazione*.

2. Alice percorre 4 giri di pista nello stesso tempo in cui Arianna ne percorre 3. Quando Arianna avrà percorso 12 giri, quanti giri avrà percorso Alice?

A. 9
B. 11
C. 13
D. 16

Significatività matematica: limitata dalla formulazione 'scolastica' che induce a scrivere una proporzione.

Significatività operativa: limitata per lo stesso motivo: nella realtà non esiste un testo che suggerisce lo schema.

Significatività formativa: limitata per lo stesso motivo: ragionamento suggerito dal testo e quindi scarsa verifica (e promozione, se proposto come esercizio) di autonomia.

Prova Invalsi 2013, classe 3ª scuola secondaria di I grado – esame di Stato

Quesito di *Matematizzazione*.

D13. **Una medicina viene venduta in scatole da 28 compresse divisibili come quella in figura. Ogni compressa è da 20 mg. La nonna di Piero deve prendere tutti i giorni, per un mese, 30 mg di questa medicina.**

Per quanti giorni la nonna di Piero può prendere la sua dose giornaliera del farmaco utilizzando una sola scatola?

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

....

....

....

Risultato: .... giorni

Significatività matematica: elevata, per quanto riguarda la complessità del problema (concatenazione di operazioni in modi possibili diversi) e la mancanza di un testo-guida alla risoluzione.

Significatività operativa: buona; problema 'realistico', con strategie risolutive non suggerite dal testo. Chi termina gli studi dopo la scuola secondaria di I grado (o li abbandona…) *DOVREBBE* essere messo in condizione di risolvere problemi del genere.

Significatività formativa: elevata per quanto riguarda l'autonomia richiesta, con valore aggiunto costituito dalla descrizione del processo risolutivo.

Prova Invalsi 2002, classe 3a scuola secondaria di I grado (Progetto Pilota)

Quesito sulla ***probabilità***: tema importante già nei programmi del 1979, per il quale manca una tradizione didattica in Italia. Ne deriva una importanza strategica, di orientamento, delle prove Invalsi (è l'unica domanda, su 25, sulla probabilità):

16. Se si lancia una monetina, si ha probabilità 1/2 che esca testa. In quattro successivi lanci esce sempre testa. Che cosa è probabile che accada lanciandola una quinta volta?

A. È più probabile che esca croce.
B. È più probabile che esca testa.
C. È ugualmente probabile che esca testa o croce.
D. È necessario avere maggiori informazioni per rispondere alla domanda.

Significatività matematica: assai scarsa (non richiede di costruire un modello matematico della situazione, ma solo di fare riferimento all'idea che "il caso non ha memoria").

Significatività operativa: assai scarsa, per lo stesso motivo precedente.

Significatività formativa: scarsa, in quanto dimostrare di avere appreso che "il caso non ha memoria" non garantisce affatto la padronanza delle ragioni per cui ciò accade.

Prova Invalsi 2013, classe 3ª scuola secondaria di I grado – esame di Stato

Quesito sulla ***probabilità*** (due domande su 25 sulla probabilità):

D7. Anna e Daniele giocano con due dadi. Ciascuno tira i due dadi e moltiplica i due numeri. Ad esempio, in questo caso 4 × 3 = 12.

Anna vince se il prodotto è un numero pari.
Daniele vince se il prodotto è un numero dispari.

Hanno entrambi la stessa probabilità di vincere?
Scegli la risposta e completa la frase.

☐ **Sì, perché** ....
....
....

☐ **No, perché** ....
....
....

Significatività matematica: discreta (richiede la padronanza della definizione 'classica' di probabilità, e la capacità di farne uso in una situazione, peraltro, scolastica).

Significatività operativa: limitata, in quanto si tratta di una situazione 'scolastica'.

Significatività formativa: discreta, in quanto richiede un ragionamento peraltro abbastanza standard, ma soprattutto per via della richiesta di spiegazione verbale[2].

La preparazione degli allievi al superamento di un test (internazionale, nazionale, o di scuola; con problemi aperti o con domande a risposta multipla) è una preoccupazione inevitabile per gli insegnanti a tutti i livelli scolastici e in tutti i Paesi.

Il problema riguarda la *qualità* dei processi di insegnamento-apprendimento così attivati in relazione alla *qualità* delle prestazioni richieste per superare il test.

SE il superamento delle prove Invalsi richiede prestazioni di buona qualità, …*teaching to the test* … *"non è peccato"*: comporta scelte didattiche articolate su tempi lunghi, capaci di incidere in profondità sulle competenze degli allievi, quindi può influire positivamente sulla qualità della formazione degli studenti e sulla professionalità degli insegnanti.

---

[2] Sull'evoluzione 2002-2014 delle Prove Invalsi per la classe 3ª della scuola secondaria di I grado relative ai temi: *Proporzionalità, Probabilità, Approccio al linguaggio algebrico e suo uso / funzioni, Argomentazione e avvio al pensiero teorico in matematica*, che sembrano registrare i più estesi ritardi nella pratica scolastica della scuola secondaria di I grado rispetto alle *indicazioni nazionali per il curricolo*, si può consultare: *http://didmat.dima.unige.it.*

Parte II
La ricerca azione dei docenti in matematica

I LAVORI DEI SEMINARI PROVINCIALI

a cura di Anna Maria Benini, Grazia Grassi, Aurelia Orlandoni

Viene presentata una sintesi dei lavori dei seminari provinciali, rappresentativa dei quattro nuclei tematici.

Come concordato con il CTS regionale, ogni gruppo di lavoro ha scelto quesiti Invalsi e attività M@t.abel, ma non solo, relativi a uno degli ambiti tematici. Le sue attività e gli interventi sono stati organizzati anche allo scopo di sottolineare la continuità tra i diversi ordini di scuola. Nelle proposte di attività laboratoriali finalizzate alla predisposizione di curricoli verticali sono stati presi in esame diversi processi indicati nei quadri di riferimento Invalsi e nei percorsi di scuola secondaria di I e II grado (biennio) suggeriti in piattaforma M@t.abel, anche se ogni gruppo ha arricchito e personalizzato il proprio percorso di riflessione e di approfondimento a seconda delle diverse sollecitazioni dei suoi componenti.

I gruppi, pur attraverso esperienze diverse, sono giunti a conclusioni comuni, didattiche, metodologiche e di carattere generale.

In particolare è emersa la necessità di:

- arricchire di 'senso' le attività di insegnamento-apprendimento, attraverso la riscoperta e la valorizzazione della matematica come strumento di lettura e di interpretazione della realtà, come linguaggio e modo di pensare, come mezzo per operare e attuare scelte;
- approfondire le questioni disciplinari, didattiche e metodologiche, anche alla luce delle proposte di attività quali quelle suggerite dal progetto M@t.abel, ritenute funzionali all'apprendimento e stimolanti, ma bisognose di tempi più dilatati e quindi della scelta di un numero limitato delle stesse da svolgersi nel corso dell'anno scolastico;
- ripensare a come debba essere la costruzione dei concetti matematici nei diversi ordini di scuola privilegiando il processo a spirale, coerente con lo sviluppo del pensie-

ro dello studente, e operando una scelta dei nodi concettuali da privilegiare rispetto a quelli su cui 'non insistere';

- riflettere sugli errori più comuni che possono dipendere da misconcezioni, procedure errate o da ostacoli cognitivi rilevabili attraverso i distrattori delle prove standardizzate (nazionali e internazionali) e individuare le strategie più idonee per evitarli, ripensando il 'lavoro d'aula', anche in un'ottica di didattica orientativa;

- identificare, a partire dai riferimenti presenti nelle *Indicazioni per i curricoli*, nel *Quadro di riferimento* Invalsi, nei documenti sulla *Literacy Matematica* di Ocse-Pisa 2012, nelle *attività M@t.abel*, quali elementi siano da considerare comuni per i bienni dei vari indirizzi della secondaria di II grado.

Nell'elaborazione di curricoli verticali, necessari allo sviluppo e/o potenziamento di processi cognitivi è stato richiamato l'importantissimo ruolo dell'*attività laboratoriale* che molto spesso non viene praticata per mancanza di tempo, ma che tutti ritengono fondamentale per l'apprendimento dei concetti matematici. Si sottolinea come spesso i docenti preferiscano utilizzare un metodo frontale, forse non più adeguato ai tempi e ai ragazzi. Il metodo 'tradizionale' dà più sicurezza e si pensa che la trasmissione del sapere sia facilitata. Lavorare allestendo laboratori e riprendendo temi che si danno per scontati, perché 'già fatti', è importante per capire, e far comprendere ai ragazzi, quanto è stato scarsamente assimilato, per favorire l'apprendimento e il passaggio dalle conoscenze alle competenze.

In generale è stata sottolineata la complessità di intervenire sulla formazione dei docenti, soprattutto nel biennio di secondo grado, in quanto vi sono problematiche e bisogni diversi: differenti livelli di ingresso degli studenti nelle diverse tipologie di indirizzi; differenti richieste e impostazione dei contenuti; diverse possibilità di fruizione di tecnologie, di laboratori e di docenti aventi competenze specifiche. Tuttavia è proprio in questo momento che i docenti sono tenuti a esplorare nuovi percorsi di insegnamento.

La risposta a sempre nuove e diverse richieste e problematiche di apprendimento deve essere una proposta di formazione che assuma un carattere permanente, in modo da costituire un riferimento continuo e un arricchimento formativo per gli insegnanti, ai quali naturalmente è richiesto un impegno continuativo e convinto.

Dovrebbe trattarsi di una vera e propria attività di ricerca, in cui è indispensabile mettersi in discussione e rinnovarsi periodicamente per poter assolvere il difficile compito di formatori; prevedere momenti di sperimentazione nelle classi e successivo confronto (in orizzontale o in verticale); prevedere diverse fasi valutative riguardanti le attività svolte e l'efficacia delle metodologie scelte.

Estendendo le caratteristiche e gli aspetti positivi del progetto EM.MA., sarebbe dunque opportuno creare un nucleo di docenti, dalla scuola primaria alla secondaria superiore, il cui impegno nella ricerca-azione funga da formazione permanente su nuclei tematici e processi, finalizzata all'acquisizione di competenze matematiche in un'ottica verticale e con una conoscenza diretta del contesto scolastico del territorio.

AMBITO: NUMERI

Tutor: Angela Balestra, Antonella Mori, Daniela Gambi, Isabella Stevani (Provincia di Ferrara); *Rosetta Adani, Matteo Angelillis, Luciana Boldrini, Stefania Desinano, Franca Ferri, Andrea Spagni, Paola Veronesi* (Provincia di Modena); *Laura Belledi; Lucia Bertolini* (Provincia di Parma)

In ogni provincia si è tenuto un incontro iniziale di presentazione del progetto e organizzazione dei lavori concentrandosi su uno/due ambiti tematici della matematica. Dopo una sintetica illustrazione da parte dei referenti provinciali delle attività formative realizzate, gli argomenti da approfondire sono stati introdotti con interventi di componenti lo staff regionale, di tutor provinciali e di docenti universitari.

Nel seminario di Parma Paola Vighi dell'Università di Parma ha approfondito alcuni temi legati al confronto fra le prove Invalsi 2011 e le prove Ocse-Pisa 2009 sottolineando gli aspetti significativi nella formazione degli insegnanti.

Da segnalare a Ferrara un approfondimento storico e teorico del concetto di numero "Il numero o i numeri?", da parte di Alessandra Fiocca, dell'Università degli Studi di Ferrara e l'iniziativa "Salotto matematico" - *L'Agorà della Matematica* con lettura e commento di alcuni brani classici relativi a Hypatia, da parte di Claudio Cazzola.

Daniela Mari dell'Università di Ferrara ha presentato una significativa riflessione sulla formazione matematica degli studenti a partire dall'analisi degli errori emersi nei test somministrati agli iscritti al primo anno della facoltà di Ingegneria. Il tutto a sostegno dell'analisi delle problematiche e degli ostacoli cognitivi in relazione al nucleo 'Numeri'.

Considerata la vastità di contenuti dell'ambito 'Numeri', ogni gruppo provinciale ha focalizzato l'attenzione su un tema specifico; ad esempio si sono trattati frazioni, numeri decimali, calcolo aritmetico, misura, percentuale e approssimazione, che raccordano in modo evidente i vari ordini di scuola. È risaputo che l'apprendimento della matematica richiede tempi lunghi e che attraverso la realizzazione di una didattica di tipo elicoidale è possibile riprendere gli argomenti, approfondendoli e ampliandoli di volta in volta. Per questo gli incontri sono stati aperti anche ai docenti di scuola primaria, per favorire un confronto in verticale sull'intero iter formativo.

Attraverso la scelta di alcuni item Invalsi, riguardanti in particolare le frazioni, selezionati dalla classe 5ª della scuola primaria alla classe 2ª della scuola sec. di II grado, si è cercato di mostrare come questa continuità sia tenuta in considerazione anche nel Quadro di riferimento del Sistema nazionale di valutazione (QdR), sebbene gli esiti rilevino purtroppo l'esistenza di fatto di una continuità di errori e aspetti negativi. Nel QdR inoltre si cerca di cogliere e di coordinare in modo equilibrato i vari aspetti della matematica quale 'strumento di pensiero', 'disciplina con un proprio specifico statuto epistemologico' e strumento 'utile' per il futuro cittadino. Nella scelta degli item Invalsi e delle attività laboratoriali M@t.abel da discutere e proporre per i lavori di gruppo si è tenuto conto anche di diversi aspetti della matematica, cercando di declinarli nel contesto del lavoro in classe, in particolare: ambito, processi mentali, oggetti di valutazione.

Per ogni quesito sono state poste ai presenti tre domande: che cosa deve sapere, che cosa deve riconoscere e quali strategie può applicare uno studente per rispondere correttamente al quesito. Sono seguiti esempi di soluzioni e di errori con relativa discussione e un'analisi dei risultati che gli item esaminati hanno ottenuto a livello nazionale. Ogni gruppo ha concluso il suo lavoro prendendo in esame almeno un'attività M@t.abel attinente ai quesiti esaminati.

Dai partecipanti è emerso un forte bisogno di collegamento tra scuola sec. di I e II grado. L'ostacolo maggiore è dato, non tanto dalla mancata disponibilità dei docenti, quanto dalla pluralità di scuole da raccordare. Diverse sono, infatti, le scelte degli studenti in uscita dalle scuole secondarie di I grado, come pure diverse sono le provenienze degli studenti delle classi prime delle scuole secondarie di II grado.

Di seguito vengono riportati i quesiti Invalsi discussi nei lavori di gruppo con i risultati nazionali e la sintesi dei commenti.

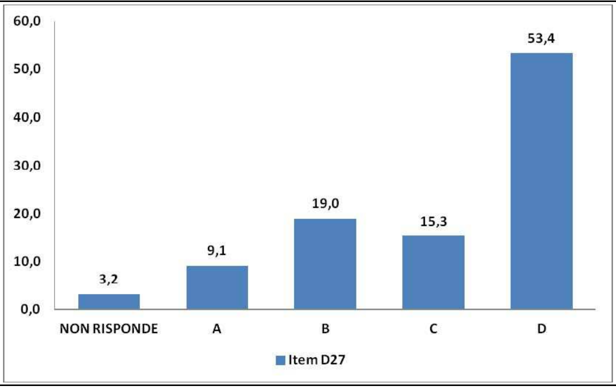
QUESITI INVALSI

Nell'ambito dei quesiti delle prove Invalsi si è convenuto sull'opportunità di proporre item relativi ai diversi ordini scolastici, evidenziandone gli elementi di problematicità, per favorire riflessioni utili a interventi di miglioramento.

Prova Invalsi - Classe 5a scuola primaria. Anno 2010. Quesito e risultati nazionali

D27. $\frac{4}{8}$ e 0,5 indicano la stessa quantità?

- ☐ A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5
- ☐ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$
- ☐ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- ☐ D. Si, perché valgono entrambi la metà di un intero

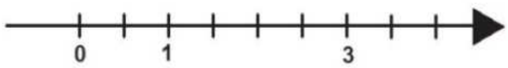


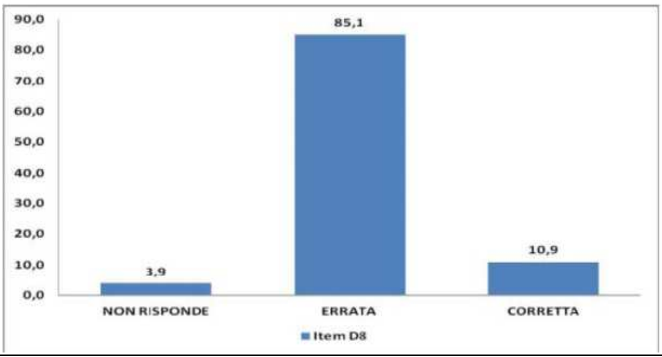
Dall'analisi degli esiti e dalla discussione è emerso come per molti allievi la frazione sia ancora un oggetto oscuro e non un numero. Il 19% degli allievi, che sceglie la risposta B, presumibilmente vede 4/8 come due numeri naturali separati da una lineetta e non come un'altra rappresentazione del numero 0,5. Lo stesso dicasi anche per il 15,3% che sceglie l'opzione C. Trattandosi di un quesito a fine fascicolo è abbastanza normale che ci sia il 3,2% di ragazzi che non risponde.

Prova Invalsi - Classe 1ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D8. Posiziona sulla retta i seguenti numeri:

$$2 \quad 2{,}5 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{10}$$





Posizionare i numeri sulla retta, benché sia un'attività che molti ragazzi conoscono già dalla scuola primaria, almeno per quanto riguarda i naturali, risulta ancora complessa, tanto più se i numeri da posizionare sono rappresentati con modalità diverse. L'elevata percentuale di risposte errate è 'giustificata' da molti degli insegnanti sulla base della mancata trattazione dell'argomento "Frazioni" in parecchie classi di prima media. Non va però dimenticato che le frazioni come operatori si affrontano fin dalla 4ª primaria, una corretta azione di continuità dovrebbe sollecitare l'approfondimento, senza mai perdere il lavoro svolto nel precedente percorso di apprendimento.

Prova Invalsi - Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D14. Per trovare il 27% di 350 si deve

- ☐ A. dividere 350 per 27
- ☐ B. dividere 350 per 0,27
- ☐ C. moltiplicare 350 per 27
- ☐ D. moltiplicare 350 per 0,27

Anche in questo caso la modesta percentuale di risposte corrette (45,9%) induce a pensare che le diverse rappresentazioni di un numero non siano possedute dai ragazzi. Capire che il 27% equivale a 27/100, cioè a 0,27, aiuterebbe i ragazzi a risolvere molti problemi che hanno a che fare con le percentuali, anche riferiti al mondo reale.

Prova Invalsi - Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

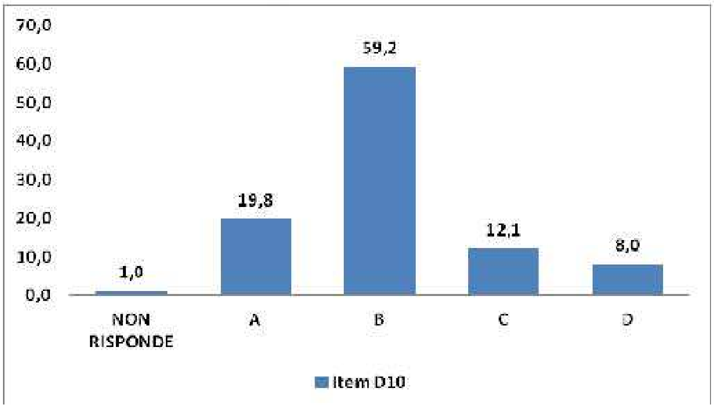
D10. Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$?

☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$



La riflessione all'interno dei gruppi di lavoro ha messo in evidenza come in questo quesito entrino in gioco *il senso della divisione e la consapevolezza che dividere per due equivale a moltiplicare per* ½ e, di conseguenza, saper tenere comunque presente *che, con l'aumentare del denominatore, la frazione diminuisce il suo valore*. Le potenze con le loro proprietà sono di fatto un 'pretesto'; i veri protagonisti del quesito sono la divisione e il significato di frazione come quoziente.

È comunque preoccupante il risultato (12,1%) dopo 12 anni di scolarità.

Prova Invalsi - Classe 1ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D14. A una conferenza sono presenti 60 persone. Gli uomini sono 12 più delle donne.

a. Quante sono le donne?

☐ A. 18

☐ B. 24

☐ C. 42

☐ D. 48

b. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta:

....

....

....

Item	*Mancata risposta*	*A*	*B*	*C*	*D*
D14a	2,6	24,0	26,9	6,7	39,8

Item	*Mancata risposta*	*Errata*	*Corretta*
D14b	7,9	74,1	18,1

Per quanto riguarda l'item 14a, un distrattore forte è rappresentato da D (48) che rappresenta la differenza fra 60 e 12 e gli studenti dimenticano di dividere per due, nel caso specifico non controllano la relazione fra il numero degli uomini e delle donne. Infatti quasi il 40% sceglie questa opzione e solo il 26,9% risponde correttamente.

Per l'item 14b aumenta il numero di omissioni pur mantenendosi al di sotto del 10% e la percentuale di risposte corrette è solamente del 18%. Nella griglia per la correzione della prova erano riportate diverse possibili strategie di soluzione corrette, come, ad esempio:

(60 - 12) : 2 = 24

60 : 2= 30, 30 - 6 = 24

Ho sottratto il numero degli uomini in più e poi ho diviso a metà.

Prova Invalsi - Classe 1ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D28. Qual è l'espressione numerica che corrisponde alla frase:
"Al 3 aggiungi il prodotto di 5 e 9, poi dividi per 6 e quindi sottrai 2"?

☐ A. $[3 + (5 + 9)] : (6+2)$

☐ B. $3 + 5 \times 9 : 6 - 2$

☐ C. $3 \times (5+9) : 6 - 2$

☐ D. $(3 + 5 \times 9) : 6 - 2$

Item	*Mancata risposta*	*A*	*B*	*C*	*D*
D28	2,2	6,0	27,0	24,3	40,5

In questo quesito viene richiamato il linguaggio matematico; la discussione evidenzia come negli alunni ci sia mancanza di conoscenza della terminologia e difficoltà nell'uso delle parentesi. Il linguaggio specifico della matematica dovrebbe essere consolidato fin dalla scuola primaria, a partire da traduzioni semplici di testi in singole operazioni ed espressioni numeriche. Non solo il linguaggio della matematica, ma anche la semplice comprensione di ciò che richiede il testo, alle volte, risulta difficile.. Osservando i risultati finali a livello nazionale ci si è chiesti se non siano dovuti alla messa in atto di procedure apprese solo meccanicamente, piuttosto che a competenze vere e proprie.

ATTIVITÀ LABORATORIALI IN CONTINUITÀ (INVALSI, M@T.ABEL, UMI MATEMATICA 2003)

Se le prove Invalsi evidenziano dei risultati carichi di problematicità, le attività M@t.abel propongono percorsi costruttivi.

Nell'ambito delle attività M@t.abel si è convenuto di affrontare contenuti che rappresentano nodi cruciali nell'acquisizione delle competenze matematiche e di selezionarli in funzione della continuità (scuola sec. di I grado e di II grado). La scelta è caduta sull'insieme dei numeri razionali (loro rappresentazioni e significati) e sulle attività "*Frazioni in movimento*", "*Dei viaggiatori, delle patate e altro...*", "*L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica*".

La prima attività punta sul concetto e sulla 'costruzione' di numero razionale, la seconda sul suo consolidamento attraverso analisi e soluzione di situazioni problematiche utili anche per gettare le basi del passaggio dall'aritmetica all'algebra, la terza affronta il nodo cruciale del linguaggio naturale e di quello algebrico. Queste attività prendono in considerazione congetture semplici, verificabili numericamente e introducono alla loro dimostrazione algebrica. In alcuni gruppi, sono state prese in esame anche altre due attività tratte da Matematica 2003, a cura dell'Unione matematica italiana, dal titolo: "Non è vero che è sempre vero" e "Sarà vero ma non ci credo"; queste, nell'ordine, prendono in considerazione congetture non sempre verificabili aritmeticamente, né dimostrabili algebricamente, e congetture verificabili aritmeticamente, ma non dimostrate algebricamente

Nell'illustrare le attività si è seguito un percorso che sottolineasse come l'acquisizione delle competenze passi attraverso la conoscenza degli oggetti, la consapevolezza del loro significato e il riconoscimento del loro valore strumentale.

I gruppi, formati da 3-4 docenti appartenenti a ordini di scuola diversi, hanno analizzato e discusso diverse tipologie di materiali forniti, utili per un lavoro in continuità:

- quesiti tratti dalle prove Invalsi di 3ª sec. di I grado e di 2ª sec. di II grado, scelti in base allo stesso processo cognitivo prevalente;
- attività M@t.abel o altre proposte correlate alla scelta precedente.

Facendo riferimento ai QdR Invalsi, si dovevano individuare, per i quesiti assegnati:

- processo sotteso;
- conoscenze e/o abilità richieste;
- possibili strategie didattiche di intervento, considerando anche le percentuali di risposte (corretta, errata o mancante),

Finalità del lavoro di gruppo sono state:

- favorire il confronto tra colleghi appartenenti a diversi ordini di scuola e indirizzi;
- condividere esperienze;
- analizzare i quadri di riferimento Invalsi, in particolare per l'ambito NUMERI;
- confrontare le indicazioni contenute nei quadri di riferimento in un'ottica di continuità.

Materiali di lavoro

Prova Invalsi - Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D2. L'insegnante chiede: "Che cosa succede se si addizionano tre numeri dispari consecutivi?". Quattro studenti rispondono nel modo che vedi in tabella.
Indica con una crocetta se le affermazioni fatte dagli studenti sono vere o false.

		Vero	Falso
a.	<u>Luisa</u>: **si ottiene sempre un numero dispari**	☐	☐
b.	<u>Giovanni</u>: **si ottiene sempre un multiplo di tre**	☐	☐
c.	<u>Andrea</u>: **si ottiene a volte un numero pari a volte un numero dispari**	☐	☐
d.	<u>Paola</u>: **si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri**	☐	☐

Item	*Mancata risposta*	*Vero*	*Falso*
D2a	1,2	80,2	18,6
D2b	1,7	62,1	36,1
D2c	1,8	20,2	78,1
D2d	2,6	55,1	42,3

È un quesito particolarmente interessante perché, oltre a trattare l'aspetto aritmetico dei numeri naturali (concetto di numero pari, di numero dispari, di multiplo), invita lo studente ad attivare le forme tipiche del pensiero matematico (dimostrazione, verifica, congettura, ecc.). Il quesito compare anche nella prova di matematica per la 2ª classe della sec. di II grado, ma con un'impostazione algebrica; rientra quindi nel nucleo tematico "Relazioni e funzioni". I risultati evidenziano una maggior difficoltà degli studenti a individuare una relazione di multiplo tra due numeri (risposte B e D) piuttosto che riconoscere un numero pari o un numero dispari (risposte A e C).

Processo cognitivo prevalente: acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare) - n. 6 QdR, p. 57.

Prova Invalsi - Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D25. Quale fra le seguenti disuguaglianze è quella corretta?

☐ A. $\frac{3}{10} < \frac{3}{5} < \frac{3}{20}$

☐ B. $\frac{4}{10} < \frac{3}{5} < \frac{11}{20}$

☐ C. $\frac{5}{10} < \frac{3}{5} < \frac{13}{20}$

☐ D. $\frac{7}{10} < \frac{3}{5} < \frac{13}{20}$

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	*B*	*C*	*D*
D25	5,0	14,7	11,7	56,9	11,8

- Abilità richieste: confronto tra frazioni, riconoscimento dei simboli maggiore, minore e del significato "compreso tra".
- Strategie possibili: maggiore uso del linguaggio specifico nella prassi didattica; favorire esercizi di rappresentazione dei numeri sulla retta e di modalità di rappresentazioni diverse.
- Possibile difficoltà linguistica nel testo legata al termine 'disuguaglianza', non sempre noto agli studenti.

Prova Invalsi - Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011

D15. Dividere un numero per 0,2 è lo stesso che moltiplicarlo per

☐ A. $\frac{1}{5}$

☐ B. $\frac{1}{2}$

☐ C. 2

☐ D. 5

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	B	*C*	*D*
D15	1,6	46,1	20,2	7,7	24,4

- Abilità richiesta: passare da frazioni a numeri decimali e viceversa.
- Strategie possibili: proporre un maggior numero di esercizi e situazioni problematiche che richiedano operazioni/confronto con numeri decimali e valutazione dei risultati.
- Formulazione del testo non semplice.

Prova Invalsi - Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D29. L'espressione $\frac{9}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{7}{10^4}+\frac{2}{10^5}$ si può rappresentare mediante il numero decimale

☐ A. 98,72

☐ B. 9,8072

☐ C. 0,9872

☐ D. 0,98072

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	B	*C*	*D*
D29	6,9	6,2	12,4	23,4	51,1

- Abilità richieste: scrittura polinomiale, utilizzo di diverse forme di rappresentazione.
- Strategie possibili: proporre un maggior numero di esercizi di questa tipologia, favorire il calcolo approssimato.
- La mancanza di 10^3 nell'espressione è stato elemento discriminante. La percentuale di risposte corrette (51%) è troppo bassa.

Per i quesiti Invalsi 'aperti' si è discusso in generale sulla formulazione della domanda "Scrivi come hai fatto per trovare la risposta".

Si sottolinea la difficoltà degli alunni nell'interpretare correttamente ciò che il quesito chiede, in quanto il più delle volte sono portati a indicare i passaggi di calcolo senza esplicitare il loro ragionamento. Si mette, quindi, in evidenza la difficoltà degli alunni nello spiegare e/o verbalizzare procedimenti e ragionamenti (assenza di processi di metacognizione). Infine, si propone di presentare agli alunni problemi tratti dalla realtà quotidiana, proprio per aumentare la consapevolezza dei processi logici messi in atto durante la fase di risoluzione di un problema.

Frazioni in movimento

Elementi nodali: numeri; introduzione al pensiero razionale; misura.

Nella prima infanzia si instaura un modello di numero, che si identifica con il numero naturale. Successivamente, la concezione di numero richiede una serie di adattamenti. In tale processo di adattamento rientra la capacità di riconoscere scritture diverse che indicano uno stesso numero: si tratta di una situazione nuova rispetto a quanto si presentava nel modello dei numeri naturali. Il passaggio dall'insieme dei numeri naturali a quello dei razionali non è un semplice ampliamento, ma richiede una vera 'riconcettualizzazione'. Per gli alunni è difficile comprendere che scritture diverse (come 0,25; 25/100; 1/4...) corrispondono a un solo concetto matematico. In questa attività si propone la costruzione di uno strumento concreto che consente di mettere in evidenza aspetti, significati e scritture diverse di un numero razionale. Con l'uso della retta numerica e di altri strumenti di rappresentazione si favorisce l'apprendimento di un concetto complesso, quale il concetto di numero razionale. La richiesta è stata quella di analizzare l'attività, avendo come sfondo la riflessione sui punti forti e punti deboli riscontrati, sull'impostazione metodologica proposta a seconda del livello scolastico, sulle difficoltà concettuali e di esecuzione, secondo una scheda di sintesi predisposta.

Dei viaggiatori, delle patate … e altro

di S. Cotoneschi, G. Crivelli, S. Ghelardini, P. Piccinini

Elementi nodali: usare consapevolmente le frazioni; consolidare gli strumenti di calcolo in situazioni problematiche; argomentare e congetturare.

Tre viaggiatori arrivano in una locanda e ordinano patate lesse. Quando l'oste porta il piatto con le patate i tre, stanchi come sono per il lungo viaggio, dormono profondamente. Poco dopo uno di loro si sveglia, mangia un terzo delle patate e si riaddormenta. Poi un altro dei tre viaggiatori si sveglia e, non sapendo che il primo aveva mangiato la sua parte, mangia un terzo di quello che trova nel piatto e torna a dormire. Infine il terzo viaggiatore, pur pensando che le patate sono ben poche per tre persone, per correttezza verso i compagni mangia al suo risveglio un terzo di quello che trova. Quando l'oste torna per sparecchiare la tavola, trova otto patate. Quante patate aveva preparato?

È stato chiesto di:

- Individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento.
- Verificare la congruenza con le *Indicazioni per il curricolo* del 2007 e con i decreti del Presidente della Repubblica n. 87, 88 e 89 del 2010, rispettivamente per gli istituti professionali, tecnici e licei.
- Fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività ed esplicitare gli adattamenti necessari.
- Proporre qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.

Gli insegnanti hanno osservato che l'attività sottoposta alla loro attenzione:

- Fornisce un buon esempio di matematica legata alla realtà.
- È incentrata su attività laboratoriali facilmente realizzabili in aula e adatte sia per la scuola di I grado, sia per quella di II grado.
- È utilizzabile per percorsi di continuità tra i due ordini di scuola.
- Favorisce la costruzione di modelli e sviluppa un atteggiamento costruttivo in relazione alle competenze di riflessione e di argomentazione.
- Stimola la formulazione di interessanti problemi da risolvere.

L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica. Numeri e algoritmi
di N. Nolli, S. Rossetto, S. Zoccante

Giochi di 'magia matematica' e sfide di capacità di calcolo mentale sono il cuore di questa attività in cui si affronta il nodo concettuale del linguaggio naturale e del linguaggio algebrico. Il riferimento è all'introduzione delle regole del calcolo algebrico e alle difficoltà che lo studente incontra quando deve tradurre algebricamente delle relazioni matematiche.

Rivolto alla scuola sec. di II grado, ha per finalità l'acquisizione di un pensiero funzionale e analisi qualitativa dell'andamento di un fenomeno. L'obiettivo è quello di evitare inutili addestramenti di sola manipolazione sintattica di formule inefficaci per la comprensione dei concetti, introducendo attività capaci di supportare gli studenti nel complesso passaggio dalla descrizione a parole delle regolarità osservate, alla generalizzazione attraverso l'uso dei simboli matematici.

L'approccio è chiaramente laboratoriale; in particolare, si sono analizzati i vari approfondimenti proposti dalla piattaforma M@t.abel. Il quesito è stato scomposto in due parti, una sulla comprensione del problema e della tabella con cui era proposto e l'altra sugli strumenti matematici indispensabili per risolverlo. Per ogni parte sono state immaginate due attività significative da svolgere in classe per guidare lo studente a una vera comprensione della problematica sottesa, cercando di evitare esercizi ripetitivi scarsamente significativi.

Il concetto di percentuale: una riflessione

A partire dagli esiti deludenti dei quesiti Invalsi sulla percentuale (ad esempio, 2011, quesiti n. 25 e 27 per la scuola sec. di II grado), è stato proposto da un insegnante di scuola sec. di II grado di Modena un percorso di riflessione sul concetto di percentuale. Il percorso è parte di un progetto complessivo più ampio per la costruzione e il consolidamento dei prerequisiti necessari allo sviluppo di abilità nella modellizzazione matematica nella scuola sec. di I grado e nel primo biennio di quella di II grado.

La prima osservazione è che il concetto di percentuale viene spesso acquisito dagli allievi come mero strumento di calcolo: non è infrequente infatti ascoltare allievi, anche al temine degli studi secondari, che chiedono al loro Insegnante: "*Come* si calcola la percentuale? Non mi ricordo mai…". È chiaro che in una domanda del genere l'enfasi è posta sulla mera tecnica di calcolo 'bypassando' completamente le domande: "*Cosa* è la percentuale? *Quali* sono i suoi ambiti di applicazione?".

La necessità di rimuovere questa acquisizione meramente strumentale, e quindi mnemonica, del concetto di percentuale è l'intento principale della presentazione multimediale proposta ai docenti dei gruppi di lavoro.

La percentuale viene presentata come snodo concettuale per la rappresentazione e la modellizzazione matematica di una serie di problemi (di ambito economico, fisico, sociale…) e viene definita tramite il concetto di frazione equivalente. Da tale scelta sono scaturite le seguenti riflessioni:

- la non neutralità, rispetto al concetto proposto, della scelta di una rappresentazione simbolica piuttosto che di un'altra (ad esempio, scrittura della percentuale come frazione o come proporzione?...);
- la contiguità del concetto di frazione equivalente con il processo di misura (cosa significa moltiplicare il numeratore e il denominatore per una stessa quantità?);
- la riconoscibilità immediata della possibilità di applicare 'il ragionamento proporzionale' a una serie di situazioni concrete (a tale scopo è stato proposto un percorso bidirezionale di modellizzazione matematica: dal modello algebrico all'invenzione di problemi descritti dal modello e dal problema alla sua traduzione in termini di percentuale);
- la possibilità di costruire modelli di accrescimento additivi e moltiplicativi in modo estremamente naturale[1].

[1] Si consultino le interessanti riflessioni di M. Impedovo M., A. Orlandoni A., D. Paola in *Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica. Classe 2a - Scuola sec. di II grado. A.s. 2010-11.*

AMBITO: SPAZIO E FIGURE

Tutor*: Sandra Gaudenzi, Claudio Martini, Donatella Martini, Marina Pascolo* (Provincia di Ravenna); *Maria Grazia Cardillo, Sandra De Pietri, Roberta Fantini, Rossella Garofani* (Provincia di Reggio Emilia); *Milva Arcangeli, Giacobba Cantone, Sonia Capitanio, Damiano Folli, Enea Lucchi* (Provincia di Rimini)

Nei seminari iniziali A.M. Benini, rappresentante del CTS regionale, ha ripreso il concetto di *literacy* (competenza) in matematica riferito a Pisa 2012 e quello di *processo cognitivo*. Sono stati inoltre esaminati gli esiti delle prove Pisa e Invalsi in Emilia-Romagna. In particolare a Rimini è stato richiamato dal tutor il progetto del MIUR "Qualità e Merito" PQM per il potenziamento degli apprendimenti in matematica nella scuola secondaria di I grado, che evidenzia criticità circa le competenze in ambito scientifico-matematico. Con il PQM si intendono potenziare le competenze chiave nell'apprendimento degli alunni attraverso una didattica più attenta ai risultati degli apprendimenti e alla loro valutazione, incidendo sulle competenze metodologiche e didattiche dei docenti mediante un potenziamento della formazione in servizio. Il modello PQM evidenzia la *relazione costante tra misurazione degli apprendimenti in ingresso, diagnosi, interventi di miglioramento e misurazione degli apprendimenti in uscita* e prevede per questo l'intervento congiunto dell'Invalsi.

A Faenza S. Alberghi, S. Gaudenzi e L. Resta del liceo "Torricelli" di Faenza (RA) hanno presentato due iniziative da loro realizzate: la *Bottega Matematica*, mostra svoltasi a Faenza nel marzo 2010, e *Matebilandia*, ovvero percorsi didattici che si possono svolgere al parco giochi di Mirabilandia, sul tema delle curve geometriche. Cuore di tali progetti sono la modellizzazione, il laboratorio didattico e le macchine matematiche. I docenti hanno presentato alcuni aspetti teorici della modellizzazione matematica, completati da una breve rassegna della ricerca internazionale in tale ambito, con particolare attenzione alla ricerca di W. Blum e R. Borromeo Ferri.

È di R. Garofani la presentazione a Reggio Emilia dell'organizzazione di esperienze di continuità con prove di passaggio dalla scuola sec. di I grado a quella di II grado, soprattutto nei distretti dove si trovano poli scolastici che hanno attivato accordi di rete con gli istituti comprensivi limitrofi. L'analisi degli esiti ha evidenziato come le difficoltà maggiori si riscontrino in geometria e in particolare nella risoluzione di problemi che richiedono di identificare aspetti geometrici in un contesto inusuale (un esempio è proposto più avanti.

La finalità principale dei lavori è stata quella di favorire il confronto dialogico tra docenti di matematica dei diversi ordini scolastici. Le linee guida condivise sono state quelle dei quadri di riferimento Invalsi e del progetto M@t.abel per l'ambito "Spazio e figure", attraverso l'analisi di alcuni tra i più significativi quesiti Invalsi e delle attività del progetto M@t.abel. Con l'obiettivo di condividere esperienze e di declinare possibili azioni in continuità verticale, sono stati creati gruppi di lavoro con la presenza di docenti della scuola sec. di I e di II grado.

Le attività M@t.abel scelte dai docenti tutor fanno parte del tema "Modellizzare e risolvere problemi". L'argomento è stato introdotto in una comunicazione di M.G. Bartolini Bussi dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, che si è soffermata in particolare sulla diversità dell'approccio alla matematica in Italia, dove al concetto di *modeling* si affianca una visione culturale e di più ampio respiro della disciplina, e l'interpretazione che emerge dal quadro Ocse-Pisa, in cui la modellizzazione è più di tipo numerico-algebrico che geometrico.

È stata richiamata, inoltre, l'importanza fondamentale del *laboratorio di matematica*, descritto nel documento UMI *Matematica 2001* come parte irrinunciabile dell'attività didattica, presentando in particolare il laboratorio dedicato alle Macchine Matematiche frequentato da diversi docenti che stanno partecipando alle attività formative organizzate in molte province della regione.

QUESITI INVALSI

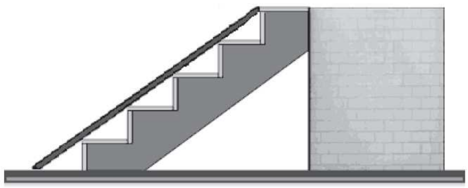
Ai partecipanti sono stati proposti percorsi per riflettere sulle novità metodologico-didattiche introdotte dalla più recente normativa nella scuola sec. di I e II grado, inquadrandole nell'ottica europea di un innalzamento dei livelli di apprendimento dei giovani. Si è passati poi a esaminare alcuni quesiti dell'ambito *Spazio e figure*, relativi alle prove Invalsi della 3ª classe della scuola sec. di I grado e della 2ª classe della sec. di II grado, illustrandoli e discutendoli nei loro aspetti principali (ambito di contenuto, oggetto di valutazione, abilità e processi mentali coinvolti, strategie risolutive possibili per la loro soluzione), e si è suggerito di discutere anche dei 'migliori' distrattori.

Per ogni quesito, sono state poste tre domande chiave: che cosa deve sapere, che cosa deve riconoscere e quali strategie può applicare uno studente per rispondere correttamente al quesito. Al termine del lavoro, si sono esaminati anche dei risultati ottenuti a livello nazionale nei singoli quesiti. È emersa la difficoltà di insegnare-apprendere il concetto di perpendicolarità e distanza nel piano, la difficoltà a misurare con il righello, ma anche a fare calcoli con tali misure, in molti casi decimali, e la difficoltà di dare significato alla sintassi algebrica.

Da numerose analisi relative ai risultati registrati nelle prove Invalsi per quanto riguarda il nucleo S*pazio e figure*, assieme alla modellizzazione, emerge fra le difficoltà più evidenti la visualizzazione spaziale. Il passaggio da una rappresentazione bidimensionale a una tridimensionale e la gestione consapevole del registro semiotico rappresentano spesso un ostacolo. La costruzione dei concetti matematici è strettamente dipendente dalla capacità di saper utilizzare registri diversi nelle rappresentazioni semiotiche dei concetti stessi, di scegliere i tratti distintivi del concetto da rappresentare e utilizzare un registro coerente, di trattare tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro (trasformazione di trattamento) e di convertirle da un registro all'altro (trasformazione di conversione), superando le misconcezioni.

Prova Invalsi. Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D22. Una scala, costituita da 5 gradini profondi 24 cm e alti 18 cm l'uno, deve essere coperta da una tavola di legno utilizzata come scivolo per il trasporto di alcune merci. Qual è il procedimento corretto per trovare la lunghezza dello scivolo?



- ☐ A. $\left(\sqrt{18^2}+\sqrt{24^2}\right) \times 5$
- ☐ B. $\sqrt{(24+18)^2} \times 5$
- ☐ C. $\sqrt{24^2+18^2} \times 5$
- ☐ D. $\sqrt{(24^2+18^2)\times 5}$

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	*B*	*C*	*D*
D22	2,4	8,6	13,9	54,7	20,3

Tre sono gli aspetti caratterizzanti del quesito:

- vuole verificare le conoscenze sul teorema di Pitagora, valutando la capacità degli alunni di riconoscere l'applicabilità del teorema in contesti diversi;
- è proposto in maniera differente rispetto agli esercizi standard;
- l'alta percentuale di scelta dell'opzione D è stata indotta da una corretta conoscenza del teorema di Pitagora, seguita dall'applicazione di un errato processo matematico.

Nell'espressione corretta il problema viene risolto con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo corrispondente a un singolo gradino. I diversi distrattori corrispondono a scritture errate dell'espressione risolutiva del problema; sarebbe interessante analizzare con gli studenti perché queste scritture non sono corrette.

Prova Invalsi. Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2010. Quesito e risultati nazionali

D20. Il Signor Carlo scende dal tram all'incrocio di *via Pietro Micca* con *via Antonio Giuseppe Bertola* (nella mappa che vedi qui sotto il punto è contrassegnato da un asterisco).

Percorre 200 metri di *via Bertola* e all'incrocio con *via 20 Settembre* svolta a sinistra; dopo aver camminato per 150 metri, raggiunge l'incrocio con *via Pietro Micca*. Da lì decide di tornare al punto di partenza per *via Pietro Micca*. Quanti metri all'incirca percorre al ritorno?

☐ A. 200 m

☐ B. 250 m

☐ C. 350 m

☐ D. 600 m

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	B	C	D
D20	1,9	7,3	45,0	32,9	12,9

Lo studente deve individuare, a partire da un testo scritto, un percorso su una mappa stradale e riconoscere che il percorso è rappresentato da un triangolo rettangolo; dovrebbe poi applicare il teorema di Pitagora (si tratta di una terna pitagorica), oppure potrebbe analizzare la compatibilità dei dati indicati nel testo (200m, 150m) con le risposte e individuare la A e la B come le uniche compatibili con le condizioni di esistenza di un triangolo; escludere poi la A perché il triangolo è rettangolo, o comunque non isoscele.

Un'altra strategia risolutiva può essere quella di misurare un cateto con il righello e ricavare la scala della cartina (visto che i dati ci dicono quanto è lunga la strada nella realtà); poi si misura l'ipotenusa e con la scala si ottiene la lunghezza reale.

La discussione sulle difficoltà che possono avere incontrato gli studenti ha portato a identificare alcune problematicità:

- difficoltà nel leggere e nell'interpretare la mappa con mancata identificazione del triangolo rettangolo necessario per la soluzione;
- difficoltà nella lettura del testo e nella correlazione con la mappa che ne traduce i dati;
- quesito formulato in modo diverso rispetto all'usuale pratica didattica;
- difficoltà nell'uso del calcolo con numeri decimali;
- la percentuale elevata degli allievi che hanno scelto la risposta C indica la non comprensione del problema, quindi un'errata strategia risolutiva determinata dai numeri presenti nel testo del problema.

Prova Invalsi. Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D8. La dimensione di un televisore è la misura della diagonale dello schermo espressa in pollici (1 pollice = 2,54 cm). Nei televisori di nuova generazione il rapporto tra la larghezza e l'altezza dello schermo è 16:9.

a. Se la larghezza dello schermo di uno di questi televisori è circa 57,5 cm, qual è all'incirca la sua altezza?

Risposta: .... cm

b. Da quanti pollici è il televisore?

☐ A. 20 pollici (= 50,80 cm)

☐ B. 26 pollici (= 66,04 cm)

☐ C. 28 pollici (= 71,12 cm)

☐ D. 32 pollici (= 81,28 cm)

<table>
<tr><td rowspan="2">Item</td><td rowspan="2">Mancata risposta</td><td colspan="4">Opzioni</td></tr>
<tr><td colspan="2">Errata</td><td colspan="2">Corretta</td></tr>
<tr><td>D8_a</td><td>27,6</td><td colspan="2">30,8</td><td colspan="2">41,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Item</td><td rowspan="2">Mancata risposta</td><td colspan="4">Opzioni</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td>D8_b</td><td>13,6</td><td>16,8</td><td>43,4</td><td>11,7</td><td>14,5</td></tr>
</table>

Il quesito si compone di due domande, una a risposta aperta e una a risposta chiusa. Il *processo cognitivo prevalente* riguarda la risoluzione di problemi attraverso strumenti propri della matematica e i contenuti coinvolti sono il calcolo con frazioni/proporzioni e il teorema di Pitagora. Nei vari gruppi si è discusso del fatto che sicuramente il quesito è maggiormente legato alla pratica didattica della scuola sec. di I grado;

questo potrebbe in parte giustificare il risultato ottenuto dalla domanda a, che ha stupito anche per l'alta percentuale (27,6%) di omissioni. Un altro problema legato a tale domanda è la gestione del calcolo delle proporzioni, che spesso non vengono riprese nella scuola sec. di II grado o collegate alle frazioni, tanto che questi due strumenti rimangono 'distanti' fra loro.

Per quanto riguarda la domanda b, i dati nazionali mettono in evidenza il calo delle mancate risposte nel caso di risposte chiuse e il fatto che i distrattori siano equivalenti fra loro.

ATTIVITÀ LABORATORIALI IN CONTINUITÀ (INVALSI, M@T.ABEL, PQM)

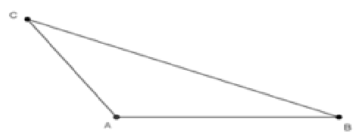
Sono stati presi in considerazione l'approccio laboratoriale nella didattica e il laboratorio matematico, utilizzando materiali Invalsi, M@t.abel, PQM proposti dai docenti. Se ne è valutata l'applicazione sia nella scuola sec. di I grado sia in quella di II; in particolare si è cercato di analizzare i vari approfondimenti proposti dalle piattaforme, proponendo diverse curvature in base alla tipologia di scuola.

Ci si è confrontati, inoltre, sulle varie attività laboratoriali relative a "Spazio e figure" svolte in classe da ogni partecipante, in grado di stimolare un apprendimento significativo negli allievi. Infine, partendo da materiale povero, è stata collegialmente ipotizzata una semplice attività da svolgere in classe, valutandone le implicazioni con gli altri argomenti e le modalità di valutazione.

Materiali di lavoro

Prova Invalsi - Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D6. Osserva il disegno.



Calcola l'area del triangolo prendendo con un righello le misure necessarie.

a. Risposta: ………….. cm^2

b. **Scrivi i calcoli che hai fatto per arrivare alla risposta.**

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Errata	*Corretta*
D6a	19,6	51,4	29,0
D6b	22,0	53,1	24,9

Erano considerate corrette misure comprese tra 3,0 cm^2 e 4,2 cm^2.

Per rispondere correttamente lo studente deve misurare, eventualmente tracciandola, l'altezza relativa a uno dei lati (si noti che in questo caso due delle altezze sono esterne al triangolo) e poi effettuare calcoli con numeri decimali. La domanda si presta a una riflessione sull'approssimazione nella misura.

Nella fase di analisi si è osservato che emergono difficoltà:

- nell'individuare l'altezza relativa alla base del triangolo;
- nell'uso del righello con adeguata abilità;
- nel corretto svolgimento dei calcoli;
- nell'argomentare i procedimenti risolutivi del problema.

In rapporto a questo quesito, è stata proposta l'attività M@t.abel "*L'albero maestro*" relativa al nodo concettuale della distanza punto-retta. Tale attività è stata illustrata nel dettaglio per fornire ai partecipanti spunti di didattica inerenti a un nodo chiave in tutta la scuola secondaria[2].

Per la scuola sec. di I grado è stata illustrata anche "*Misurare il cerchio*", che affronta una delle figure piane più complesse per i nostri allievi, che spesso ne hanno una conoscenza superficiale e confusa. A partire dal problema di trovare il centro del cerchio, l'attività si snoda su problematiche in cui gli allievi sono coinvolti nel prospettare e verificare ipotesi di soluzione con varie modalità, anche grafiche e operative. Si guidano, inoltre, gli allievi nella ricerca del legame fra il diametro, la circonferenza e l'area del cerchio a diversi livelli di difficoltà, tramite manipolazione, modellizzazione e costruzioni con software di geometria dinamica. In tal modo, si lavora su competenze varie: dalla costruzione di figure geometriche tramite strumenti, alla ricerca di definizioni e proprietà di figure piane, fino alla conquista del numero π e delle sue approssimazioni.

La città misteriosa

Prendendo spunto dall'attività "*La città misteriosa*" di M@t.abel, è stato condiviso inoltre con i docenti un intervento didattico realizzato concretamente in classe dal titolo "*Il talento di Talete*", con il quale si sono perseguiti i seguenti obiettivi didattici:

- apprendere il concetto di similitudine;
- sviluppare consapevolezza degli aspetti figurali nello studio della geometria;
- sviluppare consapevolezza degli aspetti concettuali delle figure geometriche;

[2] Riportato nella relazione iniziale di O. Robutti.

- sviluppare l'apprendimento geometrico su due livelli: visuale (le figure geometriche vengono riconosciute e identificate globalmente in base al loro aspetto e alla loro forma) e descrittivo (le figure vengono identificate in base a certe loro proprietà matematiche, che vengono enucleate attraverso un processo di generalizzazione);
- permettere un approfondimento storico della matematica.

Gli obiettivi formativi che hanno guidato la progettazione sono stati invece:
- apprendere per scoperta, operando concretamente con concetti matematici;
- sviluppare l'attenzione al linguaggio specifico;
- motivare alla partecipazione;
- favorire la verbalizzazione dei procedimenti risolutivi.

Elemento centrale di riflessione del percorso didattico è l'acquisizione di competenze quali: saper presentare la risoluzione di un problema con le spiegazioni dei calcoli effettuati e dei supporti grafici, in modo da rendere comprensibile il procedimento seguito; essere in grado di valutare l'accettabilità di un risultato ottenuto mediante una verifica o un ragionamento; essere in grado di analizzare una figura geometrica giustificandone le proprietà valide e quelle non valide; favorire l'acquisizione di competenze relativamente all'uso del software di geometria dinamica Geogebra e della LIM (inserire forme, inserire immagini, operare ingrandimenti e riduzioni, usare gli strumenti matematici quali righello e goniometro, utilizzare calcolatrice, matita, colore riempimento, caselle di testo).

Partendo dal quesito *D 22* della Prova nazionale Invalsi 2011(analizzato nelle pagine precedenti), si è aperta una riflessione sull'insegnamento/apprendimento del teorema di Pitagora nella scuola sec. di I e II grado. Si è proceduto discutendo l'attività laboratoriale proposta dal "Progetto PQM" riferita al teorema di Pitagora. L'attività, attraverso un approccio storico-genetico al teorema, ripercorre alcune tra le sue più semplici e intuitive dimostrazioni, sviluppate nel corso dei secoli da parte sia dei pitagorici, sia di vari autori. L'attività si svolge in un contesto manipolativo e di gioco, con l'uso di schede su cui sviluppare le costruzioni geometriche o di software di geometria dinamica.

Attività 1 - Le mattonelle: l'attesa di Pitagora
Attività 2 - Il puzzle di Peligal
Attività 3 - Il puzzle di Bhaskara.

Dal confronto tra i docenti è emersa la necessità di esplicitare e di condividere le conoscenze e le competenze da sviluppare, tra scuola sec. di I grado e biennio della scuola sec. di II grado; molte conoscenze acquisite dagli studenti si perdono nel passaggio da un ordine di scuola a quello successivo, come se non fossero consolidate. Pertanto è opportuno costruire ipotesi di curricolo verticale in particolare sul teorema di Pitagora, evidenziando nodi e percorsi a spirale.

Sono state formulate anche le seguenti considerazioni:

- l'utilizzo della riga e della squadra è considerato dagli studenti un'inutile perdita di tempo in entrambi gli ordini di scuola; sarebbe opportuno, per il disegno geometrico, un maggior affiancamento da parte dell'insegnante di tecnologia nella scuola sec. di I grado;
- l'analisi del testo (compresi i quesiti Invalsi) risulta essere superficiale e approssimativa;
- l'argomentare (… spiega come hai fatto, spiega il procedimento risolutivo) risulta impegnativo e difficoltoso;
- le attività laboratoriali sono importanti, ma richiedono un'ottima organizzazione e tempi adeguati.

Per la scuola sec. di II grado in alcuni gruppi si è presa in esame l'attività M@t.abel "Superfici comode e scomode", come possibile attività con cui affrontare il nodo concettuale della stima di aree di figure geometriche piane, anche in relazione agli analoghi quesiti Invalsi.

Sono state inoltre illustrate le attività "Studenti in movimento" e "Problemi di minimo nel piano".

"Studenti in movimento" è un esempio di come, a partire dal laboratorio di matematica e da semplici esperimenti di fisica, realizzati con o senza l'uso di strumenti tecnologici, si possano costruire significati (in questo caso quello di grafico posizione-tempo). Dal laboratorio di fisica si possono trarre molte altre idee per studiare relazioni tra grandezze utilizzando anche materiali poveri, come ad esempio bottiglie di plastica o 'pirottini' (cfr. *Giochi di Anacleto in laboratorio, 1998*).

L'attività "Problemi di minimo nel piano" è stata presentata in continuità didattica col 'problema del postino', più adatto alla scuola primaria e alla sec. di I grado. Si è fatto riferimento a un lavoro di sperimentazione del GREMG dell'Università di Genova, relativo al problema del postino prima, e ai problemi di minimo nel piano poi, presentato da Domingo Paola a Modena nel 2005. È stato sottolineato che percorsi di questo tipo nascono da una didattica 'sensata', cioè ragionevole e legata ai sensi: una didattica di lungo periodo in cui l'insegnante pone attenzione ai processi di pensiero dell'alunno, all'ascolto e alla discussione delle idee che emergono dal lavoro in classe.

Sono stati così condivisi e discussi la caratterizzazione strategico-metodologica e i materiali a supporto delle attività: schede operative, testi di narrativa (ad esempio, il *Teorema del Pappagallo* di Guedj Denis), supporti multimediali (il filmato del 1930 di Stanlio e Ollio dal titolo "Fratelli Monelli" che ha rappresentato un utile spunto per la riflessione) nonché le difficoltà operative e gestionali, gli ostacoli epistemologici e didattici e le risposte dei ragazzi.

Progettiamo in continuità: dalla scuola sec. di I grado a quella di II grado

I lavori si sono articolati in tre fasi:

- visione della scheda di presentazione delle attività didattiche M@t.abel e di percorsi, anche autonomi, per nuclei o per tema, relativi all'ambito *Spazio e figure*;
- .individuazione dei nodi concettuali (e/o processi) ritenuti irrinunciabili per entrambi gli ordini di scuola, a partire dalle difficoltà evidenziate dagli studenti sia in contesti usuali sia nelle prove Invalsi;
- individuazione, con riferimento ai materiali in rete, di un percorso 'in continuità', selezionando almeno un'attività per la scuola sec. di I grado e una per quella di II grado.

L'orologio

L'attività M@t.abel si riferisce al nodo concettuale degli angoli in relazione all'uso dell'orologio analogico e del passare del tempo segnato dalle lancette, con costruzione del significato di angolo e di arco, loro distinzione e applicazioni in situazioni di confronto, misura, operazioni. Partendo da una situazione problematica legata all'orologio e allargandola alla costruzione di un orologio di grandi dimensioni, si vuole che gli allievi ottengano angoli piccoli (come per es. di un grado). Questa esperienza ha lo scopo di evitare il fraintendimento, diffuso tra gli allievi, che l'angolo si identifichi con l'arco oppure con una regione finita di piano.

I docenti hanno esaminato l'attività adattandola alle esigenze del proprio percorso scolastico e ampliandola per un percorso in verticale, dalla congruenza di angoli all'intuizione di triangoli o rettangoli simili, fino all'utilizzo di angoli per un approccio alla dimostrazione. L'attività offre lo spunto per una continuità didattica tra I e II grado. La metodologia adottata si basa sull'orchestrazione da parte dell'insegnante della discussione in classe, alternando momenti di lavoro a classe intera ad altri a piccolo gruppo, per garantire la cooperazione, l'interazione, il confronto con i compagni.

La fase chiave dell'attività è sicuramente quella collettiva, gestita dall'insegnante come coordinatore della discussione 'matematica' attorno alla situazione-problema, che poggia sulla raccolta delle ipotesi di soluzione: tutte le ipotesi dei ragazzi vanno rigorosamente raccolte e messe al vaglio da loro stessi, verificando che il sostenitore di un'ipotesi sia in grado di difenderla nei confronti di altri compagni, con motivazioni più o meno razionali. Il ruolo dell'insegnante in questa fase è di ricondurre la discussione su un piano razionale, promuovendo l'argomentazione a favore di una congettura o contro di essa. Occorre, cioè, condurre verso un'argomentazione che giustifichi un'ipotesi con un ragionamento sorretto non solo da giustificazioni logiche, ma anche da calcoli sui dati disponibili.

C'è o non c'è proporzione?

A seguito di una riflessione sulle attività presentate e sui test Invalsi, in particolare quelli inseriti nella prova del primo anno della sec. di I grado, si è focalizzata l'attenzione sulle *proporzioni*, che rappresentano un argomento complesso non soltanto per le difficoltà incontrate dagli alunni, ma anche per gli ostacoli epistemologici che sono insiti in esse. I docenti di matematica e fisica lamentano, infatti, che gli alunni tendono a estendere la relazione di proporzionalità diretta anche a casi regolati da leggi fisiche del tutto differenti, adottando uno schema risolutivo errato che però operativamente rende molto sicuri.

I nodi concettuali e i processi individuati per entrambi gli ordini di scuola sono stati la similitudine (congruenza degli angoli, proporzionalità dei lati), il teorema di Talete, i modelli proporzionali e additivi.

Ombre e proporzionalità

È stato esaminato il percorso M@t.abel "Ombre e proporzionalità", ampliandolo e modificandolo per costruirne uno verticale che prosegue fino alle funzioni. Anche se inserita tra le proposte della scuola sec. di II grado, l'attività offre infatti molti spunti anche per quella di I grado. La modalità di lavoro è laboratoriale: da una fase di esplorazione e formulazione di congetture (sulla base di esperimenti o di un problema posto dall'insegnante) si passa alla discussione in aula, al confronto in un'attività di gruppo e infine alla formalizzazione del problema.

Classe 2ª di scuola sec. di I grado: attività di misurazione nel cortile (confronto altezza-ombra) o misure dirette di locali dell'istituto per scoprire la scala in cui è stata realizzata una planimetria. Raccolta di congetture e discussione in classe, guidate e stimolate da domande dell'insegnante per fare emergere il modello proporzionale.

Classe 3ª scuola sec. di I grado: individuazione di relazioni tra grandezze a partire da semplici esperimenti realizzati con materiali poveri (proporzionalità diretta e inversa, grandezze non proporzionali).

Classe 1ª scuola sec. di II grado: attività di *problem solving* sui cambiamenti di scala, studiando la variazione di grandezze geometriche con costruzione dei diversi tipi di funzione (funzione lineare, quadratica ed esponenziale).

2012 Odissea nello spazio

Progettazione dell'attività laboratoriale che ha dato la possibilità ai docenti partecipanti di mettersi concretamente in gioco, permettendo loro di vivere l'esperienza culturale della 'bottega rinascimentale' sull'esempio dei lavori di Emma Castelnuovo.

I docenti sono giunti successivamente al confronto dialogico relativamente al processo di insegnamento-apprendimento attivato, alla validità delle scelte metodologiche, alle possibili misconcezioni indotte, agli ostacoli didattici ed epistemologici che si potrebbero frapporre all'apprendimento disciplinare.

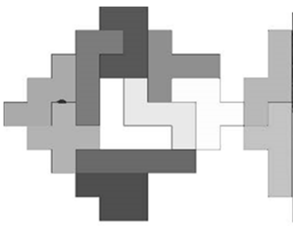
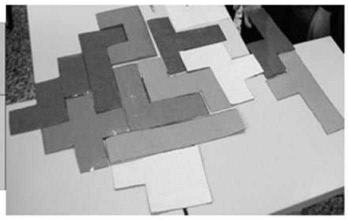
La pianificazione del workshop ha previsto la strutturazione di due momenti distinti: uno di sperimentazione e uno successivo di esplorazione e progettazione.

Prima fase

Sono stati consegnati pentamini realizzati in cartoncino e digifix, pezzi del cubo di soma, schede operative, elenco delle attività previste dal piano M@t,abel, elenco di siti di particolare interesse didattico.

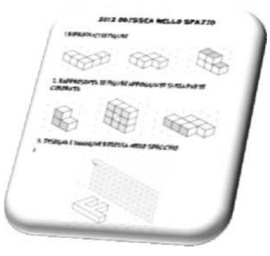
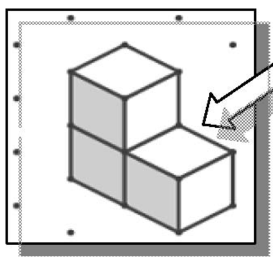
Piccoli gruppi formati da insegnanti della scuola sec. di I e II grado si sono confrontati, con la metodologia didattica del *cooperative learning*, su attività volte a favorire l'orientamento spaziale, la visualizzazione spaziale e il passaggio dalla rappresentazione bidimensionale a quella tridimensionale, in una sorta di vera e propria sfida.

Inizialmente i gruppi dovevano riproporre alcune figure utilizzando i pentamini.


I docenti si sono confrontati sui risvolti didattici e disciplinari, sul concetto di figure equiestese e isoperimetriche, sul concetto di simmetria, sul riconoscimento e sulla descrizione delle isometrie, sulla determinazione di aree di figure non convenzionali.

Il confronto è poi passato sul piano tridimensionale. Sono state esplorate le caratteristiche del cubo di soma e dei pezzi che lo compongono, mettendo a disposizione dei gruppi una riproduzione in legno del puzzle. È stata consegnata inoltre ai docenti una scheda nella quale si chiedeva di rappresentare i pezzi del cubo su carta puntinata. Progressivamente i docenti sono stati sollecitati a rappresentare il solido, immaginandolo con un orientamento diverso rispetto a quello proposto (ad esempio appoggiato sulla faccia di un dato colore).

In questo caso i docenti si sono interrogati anche sulle possibili risposte dei ragazzi: una buona rappresentazione prospettica di una figura solida presuppone conoscenze matematiche e tecniche grafiche non indifferenti.

Si sono inoltre sperimentate risorse multimediali di supporto alla didattica, quali i software *Geogebra* e *Sketchup 8*. L'uso di un software di geometria permette di vedere in maniera dinamica le proprietà delle figure dello spazio, a partire dalle caratteristiche di variabilità delle figure che si possono tracciare.

Il confronto si è esteso anche a possibili applicazioni alla scuola sec. di II grado come equivalenza ed equiscomponibilità nello spazio, determinazione di superfici e volumi nello spazio; dimostrazione, argomentazione e risoluzione di problemi in tre dimensioni.

Seconda fase: esplorazione e progettazione

Nella seconda fase dell'attività laboratoriale i gruppi hanno selezionato un'attività M@t.abel e cercato i possibili ampliamenti didattici. In particolare si è scelto di approfondire "La città misteriosa" e "Misurare il cerchio".

Con "La città misteriosa" si è potuto approfondire la proporzionalità, a partire dalla scuola sec. di I grado, per cercare di affrontare il nodo concettuale della rappresentazione di grandezze legate da proporzionalità diretta o inversa e la loro modellizzazione. In particolare la proposta di intervento didattico per la scuola sec. di I grado è stata così declinata:

- osservazioni sperimentali e determinazione di misure dirette;
- calcolo dei rapporti tra le grandezze misurate;
- rappresentazione grafica su carta millimetrata;
- studio della costante di proporzionalità che introduce al concetto di funzione.

Per la scuola sec. di II grado, i docenti hanno previsto come punti fondamentali: la sperimentazione diretta, considerazioni sulla 'pendenza della rappresentazione grafica' come introduzione al concetto di parametro, lo studio del grafico e la lettura dei valori intermedi per giungere così alle formule inverse.

Con "Misurare il cerchio" si è cercato di sviluppare in verticale il nodo concettuale legato alla relazione tra circonferenza e diametro, partendo da un problema sperimentale concreto. L'obiettivo è la modellizzazione della realtà: si parte dalla proposta di tabulare la relazione tra circonferenza e diametro di oggetti circolari all'uopo predisposti, attraverso la rilevazione con una corda non estendibile, per poter così approfondire anche l'aspetto storico. Sull'esempio della proposta di Emma Castelnuovo, si cerca di definire la relazione tra area del cerchio, diametro e π come area del triangolo equivalente che ha per base la circonferenza e per altezza il raggio. Viene introdotto così il concetto di circonferenza come luogo geometrico, per passare nella scuola sec. di II grado all'equazione della circonferenza nel piano cartesiano.

Tra i possibili collegamenti interdisciplinari, i docenti suggeriscono di riproporre il metodo di Eratostene per la definizione della circonferenza terrestre, mentre tra i supporti multimediali si può ricorrere al foglio elettronico per osservare la variazione della lunghezza della circonferenza e dell'area del cerchio al variare del raggio nonché la conseguente rappresentazione sul piano cartesiano.

Ognuno cresce a modo suo

L'attività, prevista per la scuola sec. di II grado, è stata semplificata per la scuola sec. di I grado.

Nodo concettuale: funzioni.

Obiettivi: individuare le coppie possibili di lati, dati il perimetro o l'area di un rettangolo; comprendere il concetto di equivalenza di figure piane; saper individuare il tipo di relazione diretta o inversa.

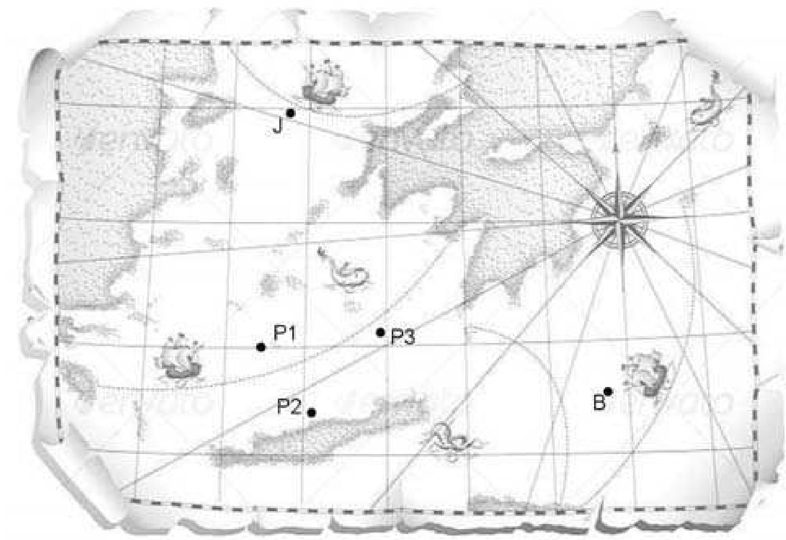
Metodologia: laboratoriale e *Cooperative Learning*.

- su foglio quadrettato/millimetrato, disegnare almeno 4 rettangoli di ciascuna famiglia (di area assegnata o di perimetro assegnato).
- registrare i dati in opportune tabelle.
- analizzare come variano i dati, osservando le relazioni tra l'area e le dimensioni dei rettangoli o tra il perimetro e le dimensioni dei rettangoli.
- rappresentare sul piano cartesiano le relazioni tra lati e perimetro, tra lati e area.
- dalla tabella dei dati e dal grafico, ricavare la relazione tra le grandezze. Eventualmente sintetizzare il lavoro in un cartellone e fare collegamenti con la Fisica.

Alla ricerca della perla nera

Sono stati analizzati e commentati gli esiti di una prova effettuata in Val d'Enza (Re) su più di 150 alunni, per far emergere elementi nodali e criticità da superare. La prova è tratta da un'esperienza di continuità della provincia di Reggio Emilia.

Jack Sparrow e Capitan Barbossa stanno navigando nel Mare dei Caraibi su rotte rettilinee e tra loro perpendicolari per raggiungere la Perla Nera che si è inabissata. Se, quando si trovano nei punti J e B indicati sulla mappa, Jack e Barbossa sono equidistanti dal punto in cui si trova la Perla Nera, quale dei tre punti segnati P_1, P_2 e P_3 ne indica la posizione? Dopo aver individuato il punto in cui si trova la Perla Nera, spiega con quale costruzione geometrica poteva essere determinato anche senza aver a disposizione tre punti tra cui scegliere.



Le risposte omesse sono pari al 7%, quelle corrette solo il 10% e, di queste, solo il 2% accompagnate da argomentazioni. Nel riepilogo seguente, sono classificate come 'costruzione assurda' risposte che ripropongono in modo acritico procedimenti utilizzati in altri esercizi, ma privi di alcun legame con la situazione descritta dal problema.

Risposta corretta		*Parzialmente corretta*	*Risposta errata*	
Argomentata	*Svolgimento 'senza parole'*	*Ignorato uno dei due dati*	*Costruzione 'assurda'*	*Svolgimento 'senza parole'*
2%	8%	58%	22%	3%

Esaminando i protocolli dei ragazzi dal punto di vista dei processi messi in atto per la risoluzione di un problema sono apparse maggiormente critiche la fase di *formulazione* e quella di *interpretazione*, a fronte di una fase di *utilizzazione* adeguata. Le difficoltà che emergono sembrano fortemente legate a una competenza trasversale, quella linguistica: uno dei dati del problema ("su rotte rettilinee e tra loro perpendicolari") viene ignorato da più della metà degli studenti che non vi riconoscono un aspetto geometrico indispensabile per identificare il punto richiesto. Anche la comunicazione della risposta è molte volte inadeguata poiché delega a un disegno o a un accenno di costruzione la giustificazione della scelta effettuata.

AMBITO: RELAZIONI E FUNZIONI

Tutor: *Claudio Massa, Maria Giovanna Papoff, Michele Soverini, Elena Spera* (Provincia di Bologna); *Carla Busconi, Paola Farroni, Maria Alberta Montruccoli* (Provincia di Piacenza); *Sandra Gaudenzi, Claudio Martini, Donatella Martini, Marina Pascolo* (Provincia di Ravenna)

Nel seminario iniziale l'ambito è stato introdotto nelle diverse province a partire dall'intervento di G. Grassi, del CTS regionale, che ha richiamato "*i nuclei fondanti della matematica nei documenti e nelle prove nazionali e internazionali*" e i risultati di tali rilevazioni.

Sono state poi evidenziate le analogie tra le *Indicazioni* del I e del II ciclo, con particolare riferimento ai licei, in funzione dello sviluppo di un percorso verticale delle competenze, rimarcando la differente metodologia didattica sottesa nei diversi livelli scolastici (C. Massa).

Il prof. G. Bolondi, dell'Università di Bologna, ha contribuito con riflessioni sul tema della valutazione, nell'ambito *Relazioni e funzioni*.

I referenti provinciali e i Tutor hanno illustrato le attività formative realizzate (EM.MA.) e i progetti nazionali M@t.abel – occasione di continuità verticale – e PQM – un'esperienza di miglioramento.

Secondo il protocollo concordato, i docenti, divisi in gruppi, hanno analizzato alcuni quesiti Invalsi o Pisa ritenuti critici sulla base dei risultati ottenuti e affrontato a livello laboratoriale "Assaggi di didattica della matematica" sul tema Relazioni e funzioni, visto sotto l'aspetto grafico e algebrico. Sono stati in particolare selezionati, per percorsi in verticale dal I al II grado, i seguenti aspetti: la lettura di grafici e tabelle, la traduzione in linguaggio algebrico di problemi e la ricerca di 'massimi e minimi' in situazioni reali. Inoltre i gruppi hanno proceduto, dopo un'accurata analisi dei quesiti scelti, ad approfondire attività M@t.abel sempre con riferimento alla costruzione di curricoli verticali e per la progettazione di attività coerenti con le riflessioni metodologico-didattiche presentate.

Le attività dei gruppi di lavoro sono state articolate in vari laboratori:

- dalle prove nazionali e internazionali alla didattica in aula;
- dai quesiti Invalsi ai processi cognitivi e ritorno: costruire, interpretare, trasformare formule;
- i linguaggi matematici.

Per le attività proposte si è provveduto a:

- evidenziare gli oggetti e i concetti matematici coinvolti, gli ostacoli epistemologici e didattici, la prassi didattica usuale;
- ipotizzare lo svolgimento nella propria classe, modificandolo in modo da adattarlo ai diversi livelli scolastici;
- declinare per ciascun livello scolastico gli obiettivi di apprendimento in relazione al quadro di riferimento Invalsi.

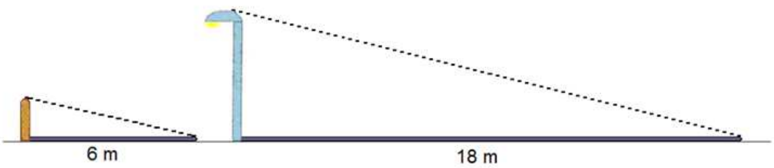
QUESITI INVALSI

I quesiti Invalsi presentati richiedono di leggere e rappresentare relazioni e dati utilizzando schemi e tabelle o il linguaggio simbolico delle lettere e di fornire argomentazioni sulle scelte effettuate. Si evidenziano così non solo conoscenze e abilità, ma competenze da perseguire nello sviluppo di un curricolo verticale, così come descritte nelle *Indicazioni* nazionali: produrre formalizzazioni che consentono di passare da un singolo problema a una classe di problemi, produrre argomentazioni, utilizzare il linguaggio matematico e confrontarlo con quello naturale.

Per ciascun quesito si sono commentati gli esiti, sottolineando come la valutazione degli apprendimenti riguardi non solo conoscenze e abilità, ma anche la capacità dello studente di trasferire in ambiti diversi, con appropriati registri comunicativi, ciò che ha appreso. Partendo dai traguardi di competenze da perseguire al termine di ciascun segmento scolastico, in ogni contesto si costruiranno il curricolo e i percorsi di apprendimento.

Prova Invalsi. Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D23. A una certa ora di una giornata di dicembre, un bastone lungo 1,5 m, piantato nel terreno perpendicolarmente ad esso, proietta un'ombra lunga 6 m. Alla stessa ora, un palo della luce proietta un'ombra di 18 m.



Quanto è alto il palo?

Risposta: ……………. m

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Errata	*Corretta*
D23	5,9	25,4	68,7

La situazione problematica è chiaramente presentata e lo studente deve risolvere un problema che dovrebbe essergli abbastanza familiare, perché nel corso della sec. di I grado si ricorre al ragionamento proporzionale in molteplici situazioni: riduzione in scala, problemi moltiplicativi, similitudine, proporzionalità diretta. Le strategie risolutive sono diversificate, perché per rispondere correttamente si possono considerare diverse coppie di rapporti, i due triangoli simili, oppure ridurre all'unità e moltiplicare.

I risultati ottenuti testimoniano una certa dimestichezza degli studenti a operare con grandezze direttamente proporzionali, anche se è necessario ancora un miglioramento. Da notare che allo studente non viene richiesto di esplicitare il procedimento risolutivo, né di spiegare, argomentare o formalizzare in qualche modo il proprio ragionamento o la strategia risolutiva, cosa che sicuramente ha contribuito ad aumentare il numero di risposte corrette o almeno a diminuire la percentuale di mancate risposte, che pure non è da sottacere.

Il *processo cognitivo prevalente* è: Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo…) - n. 4 QdR, p. 57.

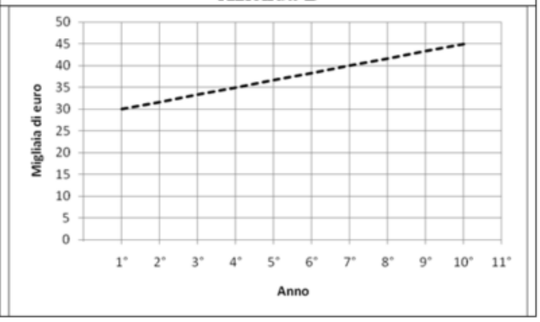
Prova Invalsi. Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D3. Il padre di Silvia riceve due proposte di lavoro, una dall'azienda A e una dall'azienda B. La tabella rappresenta come cresce nel tempo lo stipendio offerto dall'azienda A e il grafico rappresenta come cresce nel tempo quello offerto dall'Azienda B.

Azienda A

Anno	Stipendio annuo in euro
1°	34000
2°	34500
3°	35500
4°	37000
Dal quinto anno	Continua a crescere di 1500 euro all'anno

Azienda B



a. In quale anno il padre di Silvia percepirà uno stipendio annuale di 40 000 euro?

Azienda A: …………………

Azienda B: …………………

b. Se il padre di Silvia intende lavorare, nell'azienda, per dieci anni, quale proposta è più conveniente?

Risposta: ………………..

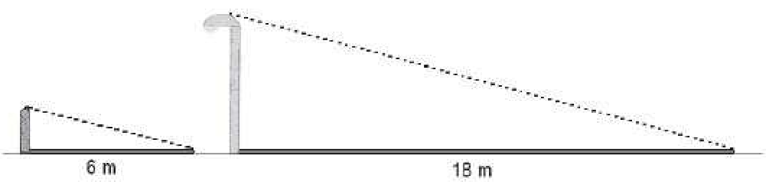
c. Giustifica la tua risposta (alla domanda b).

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

D23. A una certa ora di una giornata di dicembre, un bastone lungo 1,5 m, piantato nel terreno perpendicolarmente ad esso, proietta un'ombra lunga 6 m. Alla stessa ora, un palo della luce proietta un'ombra di 18 m.



Quanto è alto il palo?

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Errata	*Corretta*
D3a	2,0	17,2	80,8
D3b	3,3	14,0	82,7
D3c	8,3	34,4	57,3

Per rispondere a D3a e D3b lo studente deve confrontare i dati della tabella con quelli del grafico. Per D3a deve calcolare in che anno lo stipendio arriverà a 40 000 euro: 37 000 + 1 500 + 1 500, cioè al sesto anno per l'azienda A, mentre per l'azienda B è sufficiente la lettura del grafico. Per D3b deve operare nello stesso modo allo scopo di individuare l'offerta più conveniente. Per D3c deve giustificare la risposta data precedentemente. Potrebbe indicare i calcoli effettuati, ad esempio:

Azienda A: 37 000 + 1 500 × 6 = 37 000 + 9000 = 46 000. Azienda B: 45 000.

Oppure lo studente può confrontare grafico e tabella in modo generale osservando che: *nell'azienda A lo stipendio è più alto rispetto all'azienda B fin dall'inizio e così rimane per tutti gli anni*

Una strategia interessante potrebbe anche essere quella di trasformare le informazioni del grafico in una tabella numerica oppure mettere sul grafico i dati presentati in tabella. In questo modo è possibile un confronto diretto e si opera un passaggio da un registro di rappresentazione a un altro. Dai risultati emerge che la giustificazione (D 3c) ha creato qualche difficoltà, ma ciò succede quasi sempre quando si chiede agli studenti di argomentare una risposta.

Processi cognitivi prevalenti:

- conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico…) - n. 2 QdR, p. 57;
- saper risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili…) - n. 4 QdR, p. 57;
- acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare…) - n. 6 QdR, p. 57.

Prova Invalsi. Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D5. Giovanni e Caterina si stanno allenando in piscina. Nuotano entrambi alla stessa velocità ma Giovanni ha cominciato più tardi ad allenarsi. Quando Giovanni ha fatto 10 vasche, Caterina ne ha fatte 30. Al termine dell'allenamento Giovanni ha fatto 50 vasche; quante ne ha fatte Caterina?

Risposta: ……………………………………

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Errata	*Corretta*
D5	0,8	29,2	70,0

Processo cognitivo prevalente: Risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo…) - n. 4 QdR, p. 57.

Allo studente è richiesto di comprendere che Giovanni e Caterina nuotano alla stessa velocità e che la relazione fra il numero delle vasche realizzate dai due amici è di tipo additivo: $30 - 10 = 20$ e $50+20 = 70$ oppure $50 - 10 = 40$ *e* $30 + 40 = 70$.

Lo studente potrebbe essere indotto in errore dal modello proporzionale erroneamente applicato in questo contesto. Ad esempio $10 : 30 = 50 : x$, $x = 150$.

Prova Invalsi. Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D14. L'insegnante chiede: "Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?"
Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".
Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".
Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".
Chi ha ragione?

- ☐ A. Tutti e tre
- ☐ B. Solo Mario
- ☐ C. Solo Luisa
- ☐ D. Solo Giovanni

Item	*Mancata risposta*	*A*	*B*	*C*	*D*
D14	2,1	14,6	8.4	68.0	6.9

Per rispondere, lo studente:

- può utilizzare il calcolo letterale (una somma e una scomposizione mediante raccoglimento a fattor comune) riconoscendo, in seguito, nell'espressione 3(2n + 3) un numero dispari;
- può individuare, nei tre numeri dati, tre numeri dispari consecutivi e, pensando alla semiretta dei numeri naturali, riconoscere che la somma di tre numeri dispari consecutivi è il triplo del secondo numero.

Solo il 14,6% risponde correttamente nonostante al calcolo algebrico venga dedicato un tempo considerevole nel biennio. Il problema è probabilmente che il lavoro è principalmente di addestramento e manca l'abitudine ad applicarlo a contesti matematici significativi o a utilizzarlo per semplici dimostrazioni in ambito numerico. Il 68% sceglie l'opzione C ("Si ottiene sempre un numero dispari") probabilmente confondendo con quello che avviene moltiplicando 3 numeri dispari.

Prova Invalsi. Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D13. L'insegnante di inglese dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale *p* è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante.

a. Il punteggio massimo possibile è ……………………….

b. Scrivi la formula che fornisce il punteggio *p* complessivo, indicando con *n* il numero di risposte esatte.

p = ……………………………………….

c. Se la sufficienza si ottiene con più di 60 punti, qual è il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza?

Risposta: ……………………….

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Errata	*Corretta*
D13_a	5,0	6,0	89,0
D13_b	19,3	72,7	8,0
D13_c	10,2	78,5	11,3

Risposte corrette

Domanda D13_a: 100. Infatti per *n* = 25, si ottiene $p = 4 \cdot 25 = 100$

Domanda D13_b: $p = 4n - 2(25 - n) = 6n - 50$

Vanno bene sia la risposta $p = 4n - 2(25 - n)$, ottenuta senza eseguire la moltiplicazione e senza ridurre i termini simili, sia la risposta $p = 6n - 50$.

Domanda D13_c: 19. Infatti deve essere $6n - 50 \geq 60$. Quindi $6n \geq 110$, da cui si ottiene $n \geq 18{,}333...$ Il primo numero intero successivo al valore trovato è 19.

Il calcolo si può fare anche senza risolvere una disequazione. Basta procedere per tentativi e scoprire così che, per avere la sufficienza, il numero di quesiti esatti deve essere almeno 19.

La percentuale di risposte esatte all'item D13_a è circa 90%. Ciò non sorprende, visto che si tratta di moltiplicare il punteggio di una risposta esatta per il massimo numero di risposte esatte che si possono dare al test. La percentuale di risposte esatte all'item D13_b è invece la più bassa dell'intero fascicolo: solo 8 studenti su 100 rispondono correttamente e 19 su 100 non rispondono. In questo caso si trattava di costruire un piccolo modello matematico, una funzione lineare che fornisce, per ogni numero di risposte esatte, il punteggio complessivo del test. Si arriva alla risposta costruendo una semplice espressione algebrica in cui la difficoltà maggiore è mettere in relazione il numero *n* di risposte esatte con il numero *m* di risposte errate o mancanti, conoscendo il numero totale delle domande. Sarebbe interessante esaminare un campione degli elaborati per verificare se davvero gli studenti che hanno sbagliato la risposta hanno incontrato difficoltà a esprimere, più o meno esplicitamente, la relazione $m = 25 - n$. Il risultato particolarmente sconfortante ottenuto dagli studenti nel rispondere a questa domanda impone una seria riflessione sulla prassi didattica italiana, che dedica larghissimo spazio, nel primo biennio di scuola sec. di II grado, ad attività di mera manipolazione sintattica di complicate espressioni. Non si comprende a quale scopo tutto questo lavoro, se gli studenti non sono poi in grado di scrivere e manipolare l'espressione $p = 4n - 2(25 - n)$ che lega il punteggio *p* al numero *n* di risposte esatte, sapendo che vengono attribuiti 4 punti per ogni risposta esatta e che le domande proposte sono state 25 (due punti in meno per le risposte errate o mancanti).

Le risposte all'item 13_c sono andate leggermente meglio, ma ciò è comprensibile, perché la risposta poteva essere fornita anche senza costruire alcun modello e risolvere alcuna disequazione. Bastava procedere per tentativi e scoprire così che, per avere la sufficienza, il numero di quesiti esatti deve essere almeno 19.

Nella scuola sec. di II grado i risultati relativi a domande che richiedono competenze di calcolo e di manipolazione simbolica possono apparire tanto più deludenti quanto maggiori sono le risorse e il tempo effettivamente dedicati nella scuola alle attività di calcolo, sia numerico sia algebrico.

Capacità richieste per la risposta corretta: rappresentare matematicamente (*formulare*); applicare gli strumenti di matematica (*utilizzare*).

Processi cognitivi prevalenti:

- risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad es. sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo…) - n. 4 QdR, p. 57;

- acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare…) - n. 6 QdR, p. 57.

Prova Invalsi. Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D25. Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA?

Risposta: ………………… euro

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Errata	*Corretta*
D25	15,2	72,5	12,2

Per rispondere lo studente deve sapere risolvere problemi diretti e inversi relativi al calcolo di percentuali. La richiesta del problema e la capacità di costruire un'equazione lineare utilizzando dati aiutano nella risoluzione.

La percentuale di risposte corrette di circa il 12% desta preoccupazione. Anche in questo, come in altri casi segnalati, la cosa può apparire a una prima analisi sorprendente: esercizi di risoluzione di equazioni e di semplici problemi di I grado fanno parte della prassi didattica della scuola sec. di I grado e del primo anno della scuola sec. di II grado; nonostante ciò solo uno studente su 8 risponde correttamente. Forse, però, c'è poca attenzione, nella prassi didattica, a trattare questo genere di problemi e, in particolare, a distinguere tra il calcolo del valore finale di una grandezza che aumenta del 20% (= prodotto per 1,2) e il calcolo del valore iniziale di una grandezza che è aumentata del 20% (= divisione per 1,2). Il passaggio dal *modello additivo* (x + 20%x) al *modello moltiplicativo* (1,2x) deve essere oggetto specifico di didattica, se si vuole registrare un reale aumento di competenze in problemi di questo tipo. Inoltre è solo passando al modello moltiplicativo che si possono comprendere i modelli di crescite e decrescite esponenziali.

È anche possibile che, in questo caso, abbiano giocato un ruolo le difficoltà che alcuni studenti in genere incontrano con le percentuali.

Processo cognitivo prevalente: conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, algebrico…) - n. 2 QdR, p. 57.

ATTIVITÀ LABORATORIALI IN CONTINUITÀ (INVALSI, M@T.ABEL, PISA)

Anche in questo ambito i docenti, suddivisi in piccoli gruppi, hanno discusso su diverse tipologie di materiali forniti: quesiti tratti dalle prove Invalsi di 3ª sec. di I grado e di 2ª sec. di II grado o da Ocse-Pisa e attività a essi correlate tratte dalla piattaforma M@t.abel, da PQM o da altre esperienze proposte dai docenti, scelte con riferimento alla costruzione di curricoli verticali e per la progettazione di attività coerenti con le riflessioni metodologico-didattiche presentate.

Materiali di lavoro

Prova Invalsi - Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D17. La formula $L = L_0 + K \times P$ esprime la lunghezza L di una molla al variare del peso P applicato. L_0 rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla; K indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando le si applica una unità di peso.
Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:
"*È una molla molto corta e molto dura (cioè molto resistente alla trazione)*"?

- ☐ A. $L = 10 + 0{,}5 \times P$
- ☐ B. $L = 10 + 7 \times P$
- ☐ C. $L = 80 + 0{,}5 \times P$
- ☐ D. $L = 80 + 7 \times P$

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	*B*	*C*	*D*
D17	4,0	58,3	25,4	7,9	4,3

Lo studente deve collegare una formula che rappresenta un fenomeno con la descrizione di una particolare molla; per rispondere deve interpretare correttamente il significato dei parametri L_0 e K. Tra le quattro formule date deve individuare le due che hanno lunghezza iniziale minore (A e B), che rappresentano le molle più corte, e fra queste scegliere quella più resistente, che quindi si allunga di meno quando si applica una unità di peso. La formula A rappresenta una molla che si allunga di 0,5 cm quando si applica l'unità di peso. Lo studente potrebbe essere attratto dalla formula B che ha il parametro K maggiore, senza tener conto del significato di K, come descritto nella spiegazione della formula generale. Il quesito, che ha ottenuto quasi il 60% di risposte corrette, appare non facile, anche come lettura e interpretazione del testo e richiede di:

- conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra;
- utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale;

- sapere interpretare la locuzione 'molto dura' riferita alla molla;
- associare valori numerici a due diversi parametri.

Ai docenti del gruppo di lavoro viene chiesto di riflettere su:

- quali potrebbero essere le difficoltà degli studenti della propria classe/scuola?
- quale potrebbe essere l'errore più frequente degli studenti della propria classe/scuola?
- quali percorsi verticali possono favorire gli studenti nel rispondere correttamente?

Viene chiesto inoltre di proporre esempi di attività laboratoriali, adattando attività M@t.abel o situazioni problematiche che possano essere risolte con i contributi dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria integrati fra loro.

Prova Invalsi - Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D24. La formula $l = l_0 + k \cdot P$ esprime la lunghezza l di una molla al variare del peso P applicato. l_0 rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla; k indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso.
Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:
"*È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione*"?

☐ A. $l = 15 + 0{,}5 \cdot P$

☐ B. $l = 75 + 7 \cdot P$

☐ C. $l = 70 + 0{,}01 \cdot P$

☐ D. $l = 60 + 6 \cdot P$

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	B	C	D
D24	11,8	8,1	33,2	38,1	8,9

È evidente che gli esiti sono particolarmente scadenti nella scuola sec. di II grado, probabilmente perché l'argomento è più familiare nella scuola sec. di I grado, dove talvolta viene trattato anche a livello laboratoriale, inducendo una possibile strategia risolutiva basata sulla sostituzione dei valori.

Per rispondere alla domanda bisogna avere una certa confidenza con semplici modelli lineari di situazioni fisiche e saper associare, ai parametri 'intercetta' e 'pendenza' della funzione lineare che modellizza il fenomeno, le caratteristiche fisiche dell'oggetto osservato (in questo caso 'lunghezza' e 'resistenza alla trazione' della molla).

La scelta dell'opzione B (uno studente su 3) è probabilmente dovuta all'errata identificazione 'alti valori di *k*, elevata resistenza alla trazione'. Sarebbe stato sufficiente ragionare sulle conseguenze di questa affermazione per scartarla. In ogni caso i risultati suggeriscono un'attenzione non ancora sufficiente della prassi didattica all'uso di semplici modelli. Anche in questo caso, però, si deve considerare come nota positiva il fatto che quasi il 40% di studenti abbia risposto correttamente a un quesito non banale.

Gli insegnanti hanno osservato che le stesse tipologie di quesiti sono utilizzabili sia nella scuola sec. di I che in quella di II grado, con piccole modifiche. Si è rilevata, inoltre, l'importanza della didattica di tipo laboratoriale, anche al fine di interiorizzare meglio i contenuti trattati. Spesso, infatti, nello sviluppo verticale del curricolo si riscontra che alcuni concetti chiave, già trattati negli anni precedenti, non vengono correttamente e significativamente assimilati dagli studenti in modo stabile.

Attività M@t.abel

Tra le attività M@t.abel, alcune offrono esempi di continuità verticale e integrazione di ambiti diversi, per es. il "Problema del camminatore" e "Minimo nel piano".

Problema del camminatore[3]

Mr. Bean percorre a velocità costante il perimetro di un quadrato e vuole descrivere come varia la sua distanza dal centro del quadrato.

Livello scolare: scuola sec. di I e II grado

Argomenti: figure geometriche, coniche, funzioni e modelli

Il problema può essere risolto con carta e matita, oppure usando un software di geometria dinamica e in funzione di diverse variabili (lunghezza del cammino, angolo) e ammette livelli diversi di formalizzazione.

Minimo nel piano

Dati una retta e due punti che non si trovano sulla retta, determinare il cammino più breve che congiunge i punti toccando la retta.

Livello scolare: scuola sec. di I e II grado.

Argomenti: figure geometriche, funzioni e modelli.

Obiettivi:

- analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie;
- realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria…);
- utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per rappresentare formalmente gli oggetti della geometria elementare.

Il problema può essere risolto con carta e matita, oppure usando un software di geometria dinamica, e ammette anche in questo caso livelli diversi di formalizzazione.

[3] Questo problema è presentato anche nel contributo di O. Robutti, cfr. cap. 1.

LABORATORI DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA: ASPETTI ALGEBRICI E ASPETTI GRAFICI

Prova Invalsi - Classe 1ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D10. Nel disegno è rappresentata una bilancia in equilibrio. Su un piatto ci sono 6 palline, tutte dello stesso peso, e 2 cubetti, anch'essi di peso uguale fra loro. Sull'altro piatto ci sono 2 palline e 10 cubetti.

a. Se su un piatto della bilancia si aggiunge una pallina e sull'altro un cubetto, la bilancia rimane in equilibrio?

☐ Sì

☐ No

b. Giustifica la tua risposta.

....

....

....

c. Completa la frase seguente inserendo il numero corretto al posto dei puntini.

Il peso di una pallina corrisponde al peso di ……… cubetto/i.

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Sì	*No (corretta)*
D10a	2,3	39,2	58,5
Item	*Mancata risposta*	*Errata*	*Corretta*
D10b	7,1	56,7	36,2
D10c	8,9	52,7	38,4

Lo studente, analizzando la figura, deve trovare e poi formalizzare la relazione che esiste tra le due grandezze in esame.

Processi cognitivi coinvolti:

- conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e saper passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica…) - n. 4 QdR, p. 57;
- conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure - n. 2 QdR, p. 57;
- acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare) - n. 6 QdR, p. 57.

Il livello di difficoltà di ciascun quesito, secondo la scala indicata dall'Invalsi, era rispettivamente di valore -0,4; 0,6; 0,5; non si trattava quindi di quesiti particolarmente difficili. Si è posta l'attenzione allo scarto di risposte corrette tra la prima domanda e le altre due, scarto che evidenzia la difficoltà ad *argomentare* le deduzioni ottenute anche intuitivamente e a *formalizzare* il proprio pensiero in un'espressione matematica.

Per rispondere correttamente alle domande a e b lo studente può anche basarsi sul fatto che il numero di palline e cubetti nei due piatti non è lo stesso, quindi non possono avere lo stesso peso essendo la bilancia in equilibrio. Inoltre si può argomentare osservando che il numero di palline in un piatto è minore del numero di cubetti nell'altro, quindi la pallina pesa di più del cubetto.

Per rispondere alla domanda c è necessaria una strategia che potrebbe consistere nel togliere 2 cubetti e due palline da entrambi i piatti, mantenendo così l'equilibrio; rimangono 4 palline da una parte e 8 cubetti dall'altra. Si conclude che 1 pallina pesa come 2 cubetti La bilancia in equilibrio è una prima rappresentazione di problemi con equazioni $2c+6p=2p+10c$. Si tratta di una modellizzazione matematica del problema che potrebbe essere utilizzata in un secondo momento nella giustificazione della risposta alla domanda c).

Il gruppo di lavoro ha proceduto a considerare i seguenti aspetti:

- Quali distrattori sono risultati 'più attraenti' e perché? La pallina ha la stessa dimensione del cubetto e ciò potrebbe indurre a ritenerli della stessa massa. Si dovrebbe operare come in un'equazione, senza conoscerne il procedimento risolutivo.
- Quale potrebbe essere l'errore più frequente degli studenti della propria classe/scuola?
- Riformulare eventualmente la prova per adattarla alla propria classe sia come livello scolastico (2ª sec. di I grado, 1ª sec. di II grado…), sia come livello degli studenti. Ad esempio: *Ridurre il numero di oggetti per evidenziare le differenze, es. 1 pallina e 5 cubetti in un piatto e 3 palline e 1 cubetto nell'altro.*
- Quali percorsi verticali potrebbero favorire gli studenti nel rispondere correttamente?
- Elaborare un esempio di attività laboratoriale adattando eventualmente una delle attività M@t.abel. *Costruire una bilancia a bracci uguali e raggiungere l'equilibrio utilizzando oggetti di forma e massa diversa.*

Il lavoro è stato un'importante occasione di riflessione sulla propria attività didattica e sui criteri di valutazione e di confronto metodologico tra insegnanti di grado scolare diverso.

Relativamente al precedente quesito D10, è stata proposta l'attività M@t.abel "Mettiamo in equilibrio", che attraverso un lavoro laboratoriale stimola la capacità di esprimere, mediante una formalizzazione simbolica, relazioni tra grandezze. Il parallelo tra l'equilibrio di una leva (o di una bilancia) e il simbolo = in un'equazione porta a una più solida comprensione del 1° principio di equivalenza delle equazioni.

In generale, per gli *aspetti algebrici* in *Relazioni e funzioni* sono stati esaminati, anche per la scuola sec. di II grado, alcuni item Invalsi (es. D11 e D13). Per tutti i quesiti esaminati si è cercato di stimolare discussioni e riflessioni personali su: che cosa deve riconoscere e saper fare lo studente, eventuali strategie risolutive, analisi di errori più significativi (con esempi reali) e analisi dei *Risultati a livello nazionale*, collegamenti con la programmazione, possibili attività laboratoriali, anche interdisciplinari, da proporre agli studenti. In particolare, sono state analizzate le attività PQM: "Problemi e Parolacce" e "La Calcolatrice", che sono sembrate più indicate in relazione agli errori osservati.

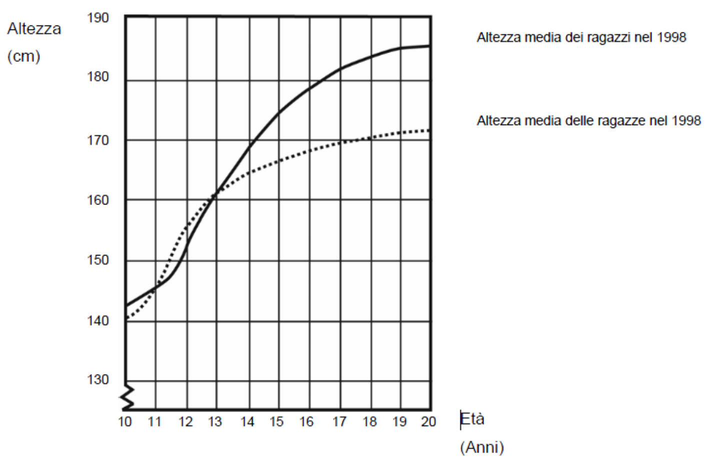
Come approfondimento, sono stati considerati i risultati delle prove Ocse-Pisa 2009 nella nostra regione, mediamente assai soddisfacenti, che hanno messo in evidenza un alto indice di variabilità; non sono omogenei e vanno individuate le zone di criticità. Di più, differenze di genere (le ragazze ottengono risultati di livello più basso rispetto ai loro coetanei maschi) e di cittadinanza (sono quasi inesistenti gli stranieri che raggiungono i livelli più alti), unite all'incidenza sugli esiti dello status socio-economico familiare, costituiscono un'emergenza regionale non ancora superata.

Anche per gli *aspetti grafici* in *Relazioni e funzioni* sono stati esaminati, per la scuola sec. di II grado, alcune prove Invalsi e i quesiti Pisa "Meli" e "La crescita", qui è riportato solo il secondo.

LA CRESCITA

I GIOVANI DIVENTANO PIÙ ALTI

Il grafico seguente mostra l'altezza media dei ragazzi e delle ragazze olandesi nel 1998.



Domanda 1: LA CRESCITA

A partire dal 1980 l'altezza media delle ragazze di 20 anni è aumentata di 2,3 cm arrivando a 170,6 cm. Qual era l'altezza media delle ragazze di 20 anni nel 1980?

Risposta: ....cm

Domanda 2: LA CRESCITA

In base al grafico, in che periodo della vita le ragazze sono, in media, più alte dei maschi della stessa età?

....

....

....

Domanda 3: LA CRESCITA M150Q03 -01 02 11 12 13 99

Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.

....

....

....

Svolgimento Dom1:
170,6cm – 2,3 cm = 168,3cm

Svolgimento Dom2:
La curva tratteggiata rappresenta l'altezza media delle ragazze
In base al grafico l'intervallo
in cui le altezze delle ragazze in media risultano
Superiori a quelle dei ragazzi è da 11 a 13 anni

Svolgimento Dom3:
Tracciando la tangente in corrispondenza dei 12 anni e verificando i coefficienti angolari di tali tangenti si ha che il coefficiente angolare (ragazze) è più piccolo del coefficiente angolare della tangente alla curva continua (ragazzi)
m=(y2-y1)/(x2-x1) (x1,y1) e (x2,y2) sono due punti della tangente

Sono state suggerite e velocemente esaminate anche le attività PQM 2011: "Ragionamento proporzionale (Marmellate e ombre)", "Scale e mappe", ritenute funzionali alla formazione e strutturazione di abilità e competenze tali da ridurre la percentuale di errori osservati, ma soprattutto idonee a favorire lo sviluppo del 'pensiero funzionale'.

Conclusioni

In relazione all'ambito "Relazioni e funzioni", si sono evidenziati:

Nodi concettuali

- passaggio dal linguaggio 'naturale' al linguaggio matematico;
- modellizzazione di problemi di vario genere;
- significato del concetto di funzione;
- scelta della corretta tipologia di grafico e di frequenza.

In particolare:

- Uso sensato dei simboli dell'algebra nella soluzione di equazioni;
- Lettura e interpretazione di grafici con passaggio tra diversi registri rappresentativi;
- Ruolo dell'argomentazione in algebra a sostegno di congetture e loro verifica.

Ostacoli cognitivi e didattici

- Comprensione del testo;
- Comprensione della simbologia (linea di frazione, rapporto ecc.);
- Valutazione dell'ordine di grandezza nei risultati;
- Manipolazione delle formule inverse;
- Mancanza di 'buon senso';
- Divisione per un numero decimale minore di 1.

Possibili scelte didattiche e metodologiche

- Individuazione di strategie didattiche e metodologiche per la costruzione di percorsi di lavoro;
- Significato e modalità di algebra 'precoce';
- Lavoro sulla comprensione del testo;
- Avvio graduale ai passaggi di manipolazione delle formule (nel contesto del pensiero proporzionale, in fisica, ecc.);
- Controllo del risultato (ordine di grandezza, suo significato 'plausibile');
- Percorsi di insegnamento/apprendimento non settoriale in cui sia possibile collegare nuovi concetti con i risultati già acquisiti.

AMBITO: DATI E PREVISIONI

Tutor*: Ivan Graziani, Enea Lucchi, Stefania Neri, Ada Siboni* (Provincia di Forlì-Cesena); *Sandra Gaudenzi, Claudio Martini, Donatella Martini, Marina Pascolo* (Provincia di Ravenna)

Nel seminario iniziale i referenti degli Uffici provinciali (Lorella Zauli e Doris Cristo) hanno richiamato le diverse iniziative riguardanti la didattica della matematica e Aurelia Orlandoni, rappresentante CTS regionale, ha presentato un'analisi dettagliata dei risultati dell'ultima indagine Ocse-Pisa e delle prove Invalsi per la scuola sec. di I e II grado del 2011, concludendo con un approfondimento sui vari quesiti proposti dalle prove Invalsi, con particolare riferimento al nucleo "Dati e previsioni". Anche per questo ambito i gruppi hanno lavorato inizialmente su alcuni quesiti Invalsi individuando come contenuti particolarmente significativi per lo sviluppo di un curricolo verticale: "grafici e tabelle" e "probabilità". Infine sono state analizzate due attività M@t.abel: "I grafici questi sconosciuti" e "Qual è la probabilità sapendo che", sempre tenendo conto della verticalità degli apprendimenti.

QUESITI INVALSI

Per la scuola sec. di I grado sono stati selezionati dalle prove Invalsi per la discussione i seguenti quesiti sulla base del *processo cognitivo prevalente:*

- D11 e D16 - Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico... - n. 6 del QdR, p. 57;
- D21a - Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica... - n. 1 del QdR, p. 57;
- D21b - Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure... - n. 2 del QdR, p. 57).

Prova Invalsi. Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D11. Per scegliere chi deve lavare i piatti del pranzo, Marco, Lorenzo e Livia decidono di lanciare due volte una moneta da 1 euro come quella che vedi in figura:

Testa **Croce**

Stabiliscono che:

- **se verranno 2 croci, laverà i piatti Marco;**
- **se verranno 2 teste, laverà i piatti Livia;**
- **se verranno una testa e una croce, laverà i piatti Lorenzo.**

a. Pensi che tutti e tre abbiano la stessa probabilità di lavare i piatti?

☐ Sì

☐ No

b. Giustifica la tua risposta.

....

....

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Sì	*No*
D11A	1,8	64,9	33,3

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*	
		Errata	*Corretta*
D11B	11,8	71,6	16,6

Per rispondere lo studente deve innanzitutto individuare lo spazio degli eventi (CC, CT, TC e TT) e calcolare la probabilità richiesta. Nella seconda parte (D11b) deve poi giustificare la risposta precedente e quindi deve esplicitare perché la probabilità che esca TC (o CT) è diversa rispetto alla probabilità che esca TT o CC.

I due item venivano considerati nel loro insieme come un unico quesito. Nonostante la probabilità di rispondere a un item SI/NO sia del 50%, solo il 33% risponde correttamente, infatti la difficoltà per gli studenti è quella di vedere che ci sono due modi in cui escono facce diverse: TC e CT, che sono due eventi distinti. L'utilizzo dei diagrammi ad albero per risolvere problemi di probabilità consentirebbe di ridurre sensibilmente la percentuale di risposte sbagliate.

Prova Invalsi. Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D16. Sara chiede agli studenti della sezione musicale della sua scuola qual è la loro materia preferita. Nella tabella ha riportato i risultati della sua inchiesta:

Materia	**Numero di preferenze**
Musica	26
Matematica	18
Italiano	13
Inglese	8

Sara conclude che la musica è la materia preferita dagli studenti della sua scuola.
Quale tra le seguenti motivazioni spiega meglio perché la sua conclusione potrebbe <u>non</u> essere valida?

☐ A. Sara non ha distinto le preferenze dei maschi da quelle delle femmine.

☐ B. Sara avrebbe dovuto intervistare solo gli studenti di terza media della scuola.

☐ C. Gli studenti intervistati non sono rappresentativi di tutti gli studenti della scuola.

☐ D. Gli studenti sono stati intervistati solo una volta.

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	*B*	*C*	*D*
D16	1,0	7,3	5,0	83,8	2,8

Lo studente deve scegliere una motivazione a sostegno di una affermazione relativa a un campione statistico. La domanda è risultata facile per gli studenti, l'83% ha risposto correttamente, ma sarebbe interessante riprendere in classe il quesito e discutere con loro sul motivo per cui i distrattori non sono corretti.

Prova Invalsi. Classe 3ª scuola sec. di I grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D21. La seguente tabella mostra il numero di iscritti a un club sportivo.

	Minori di 18 anni	Maggiori di 18 anni
Maschi	20	15
Femmine	18	22

a. Se viene scelta a caso una delle persone iscritte al club, qual è la probabilità che sia un maschio?

☐ A. $\frac{20}{35}$

☐ B. $\frac{1}{2}$

☐ C. $\frac{35}{40}$

☐ D. $\frac{35}{75}$

b. Qual è la probabilità che la persona scelta a caso abbia più di 18 anni?

Risposta: ………………

Item	*Mancata risposta*	*A*	*B*	*C*	*D*
D21a	1,4	6,5	4,2	17,1	70,8
	Mancata risposta	*Risposta Errata*		*Risposta Corretta*	
D21b	7,1	46,7		46,2	

Lo studente deve individuare (item a) e calcolare (item b) la probabilità di eventi elementari a partire da dati statistici. I distrattori, nell'item a), corrispondono a errori tipici, in particolare il distrattore B non tiene conto dei dati presenti in tabella e fa riferimento esclusivamente alla probabilità classica: casi possibili 2 (maschi e femmine), casi favorevoli 1 (maschi) quindi probabilità 1/2.

Valutando le percentuali, circa uguali, di risposte corrette ed errate dell'item b sorge il dubbio di una errata interpretazione del testo più che di una incapacità a rispondere.

Per ridurre il numero di risposte errate una strategia possibile potrebbe essere quella di proporre un maggior numero di esercizi di questa tipologia, con particolare attenzione alle risposte aperte.

Per la classe 2ª di scuola sec. di II grado sono stati selezionati per la discussione i seguenti quesiti dalla Prova Invalsi, sulla base del *processo cognitivo prevalente*:

D1 - Utilizzare la matematica per il trattamento quantitativo dell'informazione... - n. 7 QdR, p. 57;

D2 - Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure - n. 2 QdR, p. 57.

Prova Invalsi. Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D1. Nella tabella che vedi sono riportati i dati relativi alla distribuzione di alunni e insegnanti nella scuola secondaria di primo grado in Italia.

Aree geografiche	Scuole	Classi	Alunni (compresi i ripetenti)		Ripetenti		Insegnanti
			Maschi e femmine	Femmine	Maschi e femmine	Femmine	
ITALIA	7 939	82 446	1 727 339	826 869	51 407	16 199	212 041
Nord	3 381	33 131	711 292	339 508	19 615	5 679	86 312
Centro	1 358	14 656	312 700	150 098	8 066	2 508	36 570
Sud	3 200	34 659	703 347	337 263	23 726	8 012	89 159

Sulla base dei dati in tabella, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

		Vero	Falso
a.	Nel Nord gli alunni maschi sono meno delle femmine	☐	☐
b.	In Italia il rapporto insegnanti/classi è inferiore a 3	☐	☐
c.	Nel Sud ci sono mediamente più di 10 classi per scuola	☐	☐

Item	*Mancata risposta*	*Vero*	*Falso*
D1a	0,8	10,7	88,5
D1b	3,7	74,9	21,4
D1c	2,1	86,7	11,2

Per rispondere correttamente agli item della domanda D1 è necessario essere in grado di leggere una tabella e di eseguire semplici operazioni (sottrazioni e rapporti). È possibile evitare l'uso della calcolatrice se si è in grado di effettuare approssimazioni opportune dei numeri in gioco.

Le risposte corrette fornite ai tre item sono nettamente maggiori di quelle errate e il numero di risposte mancanti si può considerare trascurabile.

D1.b è, dei tre, l'item con il minor numero di risposte corrette e il maggior numero di risposte non date: potrebbe essere un'indicazione per rafforzare nella prassi didattica il fatto che il valore numerico di un rapporto aumenta se aumenta il numeratore o se diminuisce il denominatore; la padronanza di questo fatto è davvero molto importante nello sviluppo di diversi settori della matematica e in generale della preparazione scientifica degli allievi.

Prova Invalsi. Classe 2a scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D2. La corriera passa alle 6:30 alla fermata dove sale Giorgio. Nel 40% dei casi è in orario, nel 50% dei casi ha un ritardo di 5 minuti e nei rimanenti casi ha un ritardo di 10 minuti. Se Giorgio arriva alla fermata alle 6:34, che probabilità ha di prendere la corriera?

- ☐ A. 10%
- ☐ B. 40%
- ☐ C. 50%
- ☐ D. 60%

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*			
		A	*B*	*C*	*D*
D2	1,7	16,1	11,9	25,5	44,8

La risposta corretta richiedeva un'attenta lettura del testo. Fra i tre distrattori, ossia le opzioni A, B e C, che riportano, rispettivamente, i numeri 10, 40 e 50 che compaiono nel testo del quesito, gli studenti sono stati particolarmente attratti dall'opzione c). Non è strano, visto che si tratta della percentuale di casi in cui la corriera arriva in ritardo e che una lettura superficiale o affrettata può portare a identificare il ritardo come causa del perdere la corriera. In ogni caso la risposta corretta è quella che ottiene il maggior numero di scelte, una percentuale che si aggira intorno al 45%.

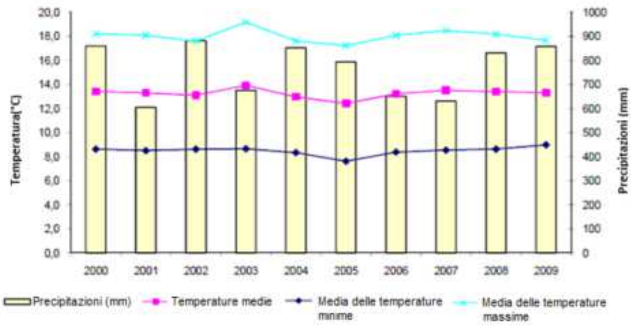
ATTIVITÀ LABORATORIALI IN CONTINUITÀ (INVALSI, M@T.ABEL, UMI MATEMATICA 2003)

Anche in questo caso l'organizzazione ha inteso favorire un lavoro in continuità e confronti tra docenti, prevedendo la presenza contemporanea in tutti i gruppi di insegnanti dei due ordini di scuola secondaria e dei diversi indirizzi all'interno della secondaria di II grado (professionali, tecnici, licei). L'attività è stata dedicata all'approccio laboratoriale nella didattica e al laboratorio matematico, utilizzando anche i materiali di Matematica 2003, oltre ai quesiti Invalsi e alle attività M@t.abel che propongono i medesimi 'oggetti di valutazione' e 'compiti'. Sulla piattaforma M@t.abel sono state scelte le attività "Qual è la probabilità di... sapendo che..." e "I grafici questi sconosciuti", valutandone l'applicazione sia nella scuola sec. di I grado sia in quella di II grado; in particolare si sono analizzati i vari approfondimenti indicati in piattaforma, proponendo curvature diverse in base alla tipologia di scuola. La prima attività affronta considerazioni iniziali relative a eventi condizionati, cioè a eventi che si verificano subordinatamente al verificarsi di altri. Ciò contribuisce, forse in modo determinante, a mettere l'allievo sulla strada di quella riflessione critica che tanto potrà essergli utile nella sua vita da cittadino. In "I grafici questi sconosciuti" (attività adattata da Matematica 2003) si affrontano la costruzione e la lettura di rappresentazioni grafiche per distribuzioni statistiche, con collegamenti interdisciplinari ed extrascolastici. Si è passati, infine, all'analisi di un quesito Invalsi di scuola sec. di II grado, cercando di rivederlo alla luce della riflessione appena conclusa. Il quesito è stato scomposto in due parti, una sulla comprensione del problema e del grafico con cui era proposto e l'altra sugli strumenti matematici indispensabili per risolverlo. Per ogni parte sono state immaginate una o più attività significative da svolgere in classe per guidare lo studente a una vera comprensione della problematica sottesa, cercando di evitare esercizi ripetitivi e di scarso significato.

Prova Invalsi. Classe 2ª scuola sec. di II grado. Anno 2011. Quesito e risultati nazionali

D12. Osserva il seguente grafico che rappresenta l'andamento delle temperature (scala a sinistra) e delle precipitazioni piovose (scala a destra) in Italia negli ultimi anni.

Figura 1. Media annua della temperatura media, massima e minima giornaliera e precipitazioni totali annue in Italia. Anni 2000-2009 ***(temperatura in gradi Celsius e precipitazioni in millimetri)***



Indica per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa o se non si può ricavare dal grafico (metti una crocetta per ciascuna riga).

		Vero	Falso	Non si può ricavare
a.	Nel decennio 2000-2009 la temperatura media annua è risultata più alta di 0,8 gradi rispetto al periodo 1971-2000	☐	☐	☐
b.	L'anno 2003 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature massime	☐	☐	☐
c.	L'anno 2005 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature minime	☐	☐	☐
d.	L'anno in cui la media delle temperature massime è stata più alta è anche quello in cui le precipitazioni sono state minori	☐	☐	☐
e.	L'anno 2005 è quello in cui c'è stato il giorno più freddo	☐	☐	☐
f.	Il 2004 è stato l'anno più piovoso	☐	☐	☐

Item	*Mancata risposta*	*Opzioni*		
		Vero	*Falso*	*Non si ricava*
D12_a	2,6	7,5	4,6	85,3
D12_b	1,8	81,5	15,8	0,9
D12_c	2,1	36,6	59,6	1,8
D12_d	3,1	12,2	76,1	8,6
D12_e	2,7	39,8	13,7	43,9
D12_f	2,4	7,7	82,4	7,5

È un quesito particolarmente interessante perché pone gli studenti di fronte alla lettura di un doppio grafico: a sinistra abbiamo la temperatura media (massima, media e minima) e a destra le precipitazioni piovose.

Gli studenti dimostrano, mediamente, buone competenze nella lettura di un grafico relativamente complesso: la doppia scala verticale (con indicazione a sinistra delle temperature e a destra delle precipitazioni) riferita a una stessa scala temporale, l'uso di rettangoli per indicare l'andamento delle precipitazioni e delle più classiche spezzate per indicare l'andamento delle temperature, il riferimento a tre grafici di temperatura (media, media delle minime e media delle massime) rendono non banale la lettura del diagramma.

Le minori percentuali di risposte corrette sono state registrate per gli item 12_c e 12_e. Nel caso del 12_c può esserci stata un'interferenza tra i termini 'più alto' e 'minime' nella richiesta ("il più alto valore nella media delle temperature minime"). Nell'item 12_e molti studenti, dall'informazione che il 2005 è stato l'anno in cui è stata più bassa la media delle temperature minime, hanno concluso, in modo scorretto, che in quell'anno si è avuto il giorno più freddo.

Commenti

Partendo dall'analisi dei quesiti Invalsi prescelti, si è considerata l''etichettatura' a essi abbinata, per evidenziare le relazioni fra i processi cognitivi coinvolti e la prassi didattica. Dal confronto è emersa la necessità di privilegiare una didattica di tipo laboratoriale, al fine di interiorizzare meglio i contenuti trattati e allo scopo di costruire percorsi verticali fra i diversi ordini di scuola, oltre a una cultura della valutazione (interna ed esterna) per favorire il passaggio dalle conoscenze alle competenze.

Si è poi sottolineato il fatto che esistono diversi livelli di competenze da declinarsi in verticale in un contesto di insegnamento elicoidale. Le stesse tipologie di quesiti sono proponibili sia nella scuola sec. di I grado, sia in quella di II grado, con adeguate modifiche nella formulazione.

Postfazione

UN'ESPERIENZA PROIETTATA VERSO IL FUTURO

Giorgio Bolondi

L'acronimo EM.MA., come è stato osservato, da un lato richiama a una emergenza, e quindi a una situazione di criticità e difficoltà, dall'altro rimanda a Emma Castelnuovo, con tutti gli scenari di lavoro, rinnovamento, positività che questo implica. Limitarsi a osservare, o a fare osservare dalle indagini nazionali e internazionali, che la matematica nelle nostre scuole è in emergenza, serve a poco. Lo sappiamo tutti, lo certifichiamo noi insegnanti. La materia in cui si assegnano più debiti è la matematica; quella che spesso determina la 'perdita' di un anno con conseguente cambio di tipologia di scuola, è la matematica. Quasi sempre presente nel fallimento scolastico e nel conseguente abbandono, è poi discriminante nell'orientamento delle scelte universitarie. Università la quale, dal canto suo, certifica quantità enormi di OFA agli studenti in entrata, e affida spesso ai corsi di matematica dei primi anni il compito di selezionare.

Cosa si può fare, cosa possono fare le istituzioni per migliorare la situazione? Non c'è dubbio che il primo passo è cercare di conoscere con obiettività, senza cercare giustificazioni, senza 'normalizzare' una realtà che normale non è. Per prima cosa è richiesta a tutti (istituzioni, ricercatori, insegnanti, studenti, famiglie) sincerità verso se stessi e verso la società, per prendere atto, analizzare e interpretare i dati che sempre più numerosi si accumulano intorno all'evidenza delle criticità degli apprendimenti della matematica dei nostri ragazzi. E quindi sincerità, critica ma non 'selvaggia', nel leggere i dati, i numeri: dall'Invalsi alle percentuali di bocciati, dall'OCSE-PISA alla distribuzione dei debiti, dai test di ammissione all'Università all'indagine OCSE-PISA.

Detto questo, però la vera sfida è nel che fare. Il progetto EM.MA., in linea con quanto la ricerca e la riflessione internazionale vanno sempre di più mettendo in evidenza, ha proposto un insieme di azioni che hanno al loro centro gli insegnanti. Qualunque miglioramento nella scuola passa attraverso gli insegnanti, il loro lavoro e il loro coinvolgimento. L'unico modo per migliorare la scuola è fornire agli insegnanti le condizioni e gli strumenti per il miglioramento, e in primo luogo strumenti per la loro personale crescita.

Nel progetto EM.MA. sono stati coinvolti insegnanti di matematica che hanno lavorato con i propri colleghi, nella propria scuola e tra le scuole. I materiali su cui hanno lavorato sono stati i dati, di cui parlavamo prima; sono state le esperienze proprie e di altri insegnanti, o di progetti di ricerca; sono stati i confronti nazionali e internazionali; sono stati gli strumenti attraverso i quali si sviluppa il percorso quotidiano delle classi (tecnologie, libri, materiali fisici....); sono state le sfaccettature della matematica e i suoi intrecci con le altre discipline.

Alla fine ne è risultato un vero e proprio fermento, inteso in senso letterale come un qualcosa di interno che ha portato tutto l'organismo a crescere. Questo fermento ha contribuito anche a dare un senso a cose che altrimenti possono sembrare completamente avulse dai veri problemi della scuola, come ad esempio il Rapporto di Autovalutazione.

Gli insegnanti di EM.MA. (ma a posteriori e a cascata tutti gli insegnanti dell'Emilia Romagna) hanno adesso dei modelli di azione per il miglioramento: si tratta di modelli organizzativi per la singola scuola e per le reti di scuole; modelli di analisi dei risultati delle Prove Invalsi; schemi operativi per interfacciare l'osservazione in classe, le valutazioni esterne, e le Indicazioni Nazionali. Hanno anche esplorato (nella pratica del loro mestiere di insegnanti) quanta concretezza ci può essere dietro parole che, in molti casi, possono rimanere solo slogan teorici: *verticalità, laboratorio di matematica*, *competenze*.

Questo volume è al tempo stesso documentazione e racconto, materiale di sintesi e strumento di lavoro per il futuro. Il patrimonio costituito con EM.MA. servirà a lungo agli insegnanti di matematica della nostra regione, e d'esempio per altri. L'ultima parola, quindi, deve essere un GRAZIE a tutti gli insegnanti che in questi anni hanno dedicato il loro tempo, le loro energie e le loro idee a questo lavoro.

Appendice

Sitografia

Di seguito sono elencati siti di interesse nei quali reperire i materiali dei progetti M@t.abel e PQM, di emanazione ministeriale, e altri citati nei report dei seminari provinciali, oltre naturalmente al sito Invalsi per i materiali di SNV.

Invalsi: *http://www.invalsi.it/areaprove/*

M@t.abel: *http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=home &area_t=f&id _ambiente=7.*

PQM (Piano qualità e merito): *http://www.indire.it/pqm2012/*

La Bottega Matematica della Palestra della Scienza: *http://palestradellascienzafaenza.racine.ra.it*

Museo del calcolo di Pennabilli*: http://www.mateureka.it*

Matebilandia: *http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/articoloMatebilandia2.pdf*

I giochi di Anacleto: *http://epsilonzero.altervista.org/olimpiadi/indexa.htm*

Laboratorio di Macchine matematiche: *http://www.macchinematematiche.org*

Il progetto EM.MA.

Comitato tecnico scientifico

Giancarlo Cerini (responsabile), Anna Maria Benini, (referente scientifico), Domenico Altamura, Rossella Garuti, Grazia Grassi, Claudio Massa, Aurelia Orlandoni, Maria Giovanna Papoff

Tutor Senior EM.MA. – Tutor M@t.abel – Tutor PQM

Bologna: Maurizio Casali, Daniela Digiangirolamo, Franco Frolloni, Silvana Giuliani. Maria Giovanna Papoff, Paola Pasotti, Elena Spera, Michele Soverini.

Ferrara: Angela Balestra, Roberta Farina, Daniela Gambi, Antonella Mori, Anna Pellizzari, Isabella Stevani.

Forlì-Cesena: Ivan Graziani, Stefania Neri, Ada Siboni.

Modena: Rosetta Adani, Matteo Angelillis, Luciana Boldrini, Marika Cavazzoni, Franca Ferri, Paola Veronesi.

Parma: Laura Belledi, Lucia Bertolini, Erica Zaccomer, Sara Ziveri.

Piacenza: Carla Busconi, Paola Farroni, M. Alberta Montruccoli, Maria Pia Scotti.

Ravenna: Annarita Donati, Sandra Gaudenzi, Claudio Martini.

Reggio Emilia: Daniela Barozzi, Giuseppina M. Cardillo, Sandra De Pietri, Roberta Fantini, Cinzia Villani.

Rimini: Milva Arcangeli, Manuela Bordoni, Damiano Folli, Giovanna Frisoni, Flavio Genghini, Anna Santi.

Autori

Domenico Altamura
Già docente di matematica e scienze, è dirigente scolastico presso il liceo scientifico "Copernico" di Bologna. Docente, coordinatore, direttore in corsi di formazione per docenti, ha coordinato le attività seminariali regionali dei progetti EM.MA. e ha fatto parte del CTS.

Anna Maria Benini
Già Dirigente tecnico dell'USR E-R per l'area matematico-scientifica, ha partecipato a progetti e gruppi di lavoro del MIUR. Si è occupata di Valutazione degli apprendimenti, collabora con l'Invalsi nei Nuclei di Valutazione esterna delle scuole. Referente scientifico del progetto EM.MA..

Paolo Boero
Professore associato nel raggruppamento MAT/04 all'Università di Genova, dal 1976 coordina gruppi di ricerca impegnati nel rinnovamento dell'insegnamento della matematica. Responsabile e consulente scientifico di progetti nazionali, coordinatore e presidente di gruppi e comitati a livello anche internazionale.

Giorgio Bolondi
Professore ordinario presso il Dipartimento di matematica dell'Università di Bologna, è consulente dell'Invalsi per i Quadri di riferimento e le prove di matematica e del MIUR per i nuovi curricoli della scuola secondaria.

Giancarlo Cerini
Già Dirigente tecnico presso l'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna e responsabile del Progetto EM.MA., dirige il bimestrale "Rivista dell'istruzione".

Ferran Ferrer
Era docente e ricercatore di Educazione comparata presso l'Università autonoma di Barcellona e coordinava il gruppo di analisi di politiche educative e di formazione. Ha collaborato con varie organizzazioni internazionali e partecipato a progetti europei

Rossella Garuti
Già dirigente scolastico dell'IC di Novi (Mo) e consulente del servizio di valutazione della provincia autonoma di Bolzano, ha fatto parte del CTS del progetto EM.MA.. Esperto nella rilevazione degli apprendimenti scientifici (Ocse-Pisa, Tims), è consulente Invalsi per il Servizio nazionale di valutazione.

Grazia Grassi
Già docente di matematica, ora dirigente scolastico, ha svolto attività di formazione presso l'Università di Bologna in collaborazione con scuole ed enti di ricerca. Ha fatto parte del CTS del progetto EM.MA..

Francesca Martignone
Ricercatrice TD presso l'Università del Piemonte Orientale, già borsista presso UniMoRe. Progettista e formatrice nel progetto regionale MMLab-ER (Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia Romagna), è collaboratrice dell'Invalsi per le prove di matematica.

Claudio Massa
Già docente di matematica e fisica presso il liceo "Righi" di Bologna, è stato funzione obiettivo e vicario. Collaboratore della cattedra di Fisica presso Ingegneria dell'Università di Bologna, è stato coordinatore e relatore di corsi di aggiornamento; ha fatto parte del CTS del progetto EM.MA..

Aurelia Orlandoni
Già docente di matematica e ricercatrice presso l'IRRE E-R, è formatrice e autrice di materiali di studio per la matematica. Esperta nella rilevazione degli apprendimenti scientifici (Ocse-Pisa, Tims) è consulente Invalsi per il Servizio nazionale di valutazione. Ha fatto parte del CTS del progetto EM.MA..

Domingo Paola
Docente di matematica e fisica presso il liceo "Bruno" di Albenga, ha collaborato con l'Università di Genova, ha fatto parte di commissioni nazionali e gruppi di ricerca; membro del CIIM, è nel gruppo di lavoro per le prove Invalsi.

Maria Giovanna Papoff
Docente di Scienze matematiche nella scuola sec. di I grado, ha partecipato a progetti di ricerca metodologica e di innovazione didattica, collaborando con USR E-R, con Irre E-R e con Invalsi per le prove di matematica.

Ornella Robutti
Professore associato in Didattica della matematica presso l'Università di Torino, ha partecipato a progetti di ricerca ed è membro di comitati scientifici internazionali e nazionali, in particolare del progetto M@t.abel. Coordina i *GeoGebra Institutes* italiani.

Stefano Versari
Ingegnere, prima dirigente d'azienda industriale, dal 2002 Dirigente del Ministero dell'Istruzione, è Direttore Generale dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna. Ha pubblicato numerosi contributi in materia di istruzione e politiche formative e ha curato diversi volumi. Suoi articoli sono stati pubblicati sulla stampa quotidiana e periodica.

Rosetta Zan
Già professore associato di Matematiche complementari presso il Dipartimento di matematica dell'Università di Pisa, è ricercatore sui temi delle difficoltà in matematica e del ruolo dei fattori non cognitivi nell'apprendimento. Presidente della CIIM, è rappresentante italiana nell'*Education Committee dell'European Mathematical Society.*

LE PUBBLICAZIONI DELL'UFFICIO SCOLASTICO REGIONALE PER L'EMILIA-ROMAGNA

Collana "I Quaderni dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna"

N.	*Titolo*	*Anno*
1	L'Amministrazione scolastica in Emilia-Romagna	2002
2	Uno sguardo sul sistema scolastico dell'Emilia-Romagna	2002
3	Istituti Comprensivi in Emilia-Romagna	2002
4	La formazione in servizio del personale	2002
5	La scuola in ospedale dell'Emilia-Romagna	2002
6	Una scuola allo specchio. Rapporto regionale 2003 sul sistema scolastico in Emilia-Romagna	2003
7	Le buone pratiche della flessibilità	2003
8	Il portfolio degli insegnanti	2004
9	Sperimentazione della riforma in Emilia-Romagna	2004
10	Una scuola in... attesa. Rapporto regionale 2004 sul sistema scolastico e formativo in Emilia-Romagna	2004
11	Curricoli di scuola	2005
12	Idee di tempo idee di scuola	2005
13	Una scuola alla prova. Rapporto regionale 2005 sul sistema di istruzione e formazione	2005
14	Valutare per migliorarsi	2005
15	Appassionatamente curiosi. Per una didattica delle scienze dell'atmosfera	2006
16	Una scuola tra autonomia ed equità. Rapporto regionale 2006 sul sistema di istruzione e formazione	2006
17	Genitori nella scuola della società civile	2006
18	Tra riforma e innovazione. I nuovi ordinamenti nelle scuole del I ciclo e dell'infanzia in Emilia-Romagna	2006
19	C'è musica e musica: scuole e cultura musicale?	2006
20	Autonomia, docenti, nuove professionalità. Percorsi di formazione tra Università e scuola	2006
21	Cittadinanza attiva e diritti umani	2006
22	Cercasi un senso, disperatamente – Contributi ed esperienze per il contrasto al disagio giovanile e alla dispersione scolastica	2006
23	Teaching English – Ricerca e pratiche innovative per la scuola primaria	2006
24	Scuola, lavoro, impresa. Costruire in sussidiarietà si può	2007
25	La scuola e i suoi territori. Rapporto regionale 2008 (volume I)	2008
26	La scuola e i suoi territori. Rapporto regionale 2008 (volume II)	2008
27	Scienza, Conoscenza e Realtà. Esperienze di didattica delle scienze	2008
28	Essere docenti. Manuale per insegnanti neo-assunti 2009	2009
29	Le scuole paritarie nel sistema nazionale di istruzione	2009
30	La strategia del portfolio docente	2011
31	Le competenze dei quindicenni in Emilia-Romagna	2011
32	Essere docenti in Emilia-Romagna 2011-12	2012
33	Essere docenti in Emilia-Romagna 2012-13	2013
34	Essere docenti in Emilia-Romagna 2013-14	2014
35	Essere docenti in Emilia-Romagna 2014-15	2015
36	Essere docenti in Emilia-Romagna 2015-16	2016

Collana "Fare sistema in Emilia-Romagna - USR, IRRE, Regione Emilia-Romagna"

La Regione in Musica	2009
Italiano Lingua2	2010
Lingue e culture	2010
Scienze e tecnologie	2010

Collana "I Quaderni dei Gruppi di ricerca IRRE e USR E-R" - serie I

1. Arte - 2. Attività motorie - 3. Geografia - 4. Lingua italiana - 5. Lingue straniere - 6. Matematica - 7. Musica - 8. Scienze - 9. Storia - 10. Tecnologia - 11. Funzioni tutoriali - 12. Unità di apprendimento - 13. Idea di persona - 14. Laboratori - 15. Personalizzazione - 16. Valutazione formativa e portfolio	2008

Collana "I Quaderni dei Gruppi di ricerca IRRE e USR E-R" - serie II

1. Arte - 2. Corpo, movimento, sport - 3. Geografia - 4. Italiano - 5. Lingue straniere - 6. Matematica - 7. Musica - 8. Scienze - 9. Storia - 10. Tecnologia e LIM	2010

Fuori collana

Essere studenti in Emilia-Romagna 2001-02	2002
Essere studenti in Emilia-Romagna 2002-03	2003
Essere studenti in Emilia-Romagna 2003-04	2004
Essere studenti in Emilia-Romagna 2004-05	2005
ValMath - Valutazione in Matematica	2005
Essere studenti in Emilia-Romagna - Annuario 2005	2006
Almanacco 2007 - Un anno di scuola in Emilia-Romagna	2007
Essere studenti. Annuario 2007 sul sistema educativo dell'Emilia-Romagna	2007
Almanacco 2008 - Un anno di scuola in Emilia-Romagna	2008
DoceBO 2008: quaderno dei convegni e dei seminari Bologna	2008
Le competenze degli studenti in Emilia-Romagna. I risultati di PISA 2006	2008

Tutti i volumi sono reperibili e scaricabili sul sito dell'Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia-Romagna: *www.istruzioneer.it* nella sezione "*Pubblicazioni*"