

Disciplina: Matematica⁸

Contesto (Bisogni formativi / potenzialità degli studenti)

Una classe 2^a di un istituto tecnico industriale o di un liceo.

Oggetto (Contenuti / Idea formativa)

Oggetti matematici: relazioni esprimibili nel registro dell'algebra, concetto di funzione e di equazione, argomentazioni e verifiche, modelli matematici (tabelle, grafici, relazioni algebriche), strategie risolutive, uso consapevole dei diversi registri rappresentativi, trattamenti e conversioni tra diversi registri.

Il percorso denominato "Una bella nuotata" si articola in una sequenza di situazioni problematiche connesse all'individuazione della tariffa più conveniente di accesso alla piscina comunale, in rapporto al numero degli ingressi che si intendono effettuare.

Il lavoro originale, pubblicato in Brandi P., Salvatori A. *Laboratori di innovazione didattica 2006/2007, Progetto Matematica e realtà* dell'Università di Perugia, è assunto come *caso di studio* per una riflessione su quali conoscenze, abilità e competenze sono coinvolte nella sua attuazione in classe, in riferimento all'Asse matematico di cui al Documento tecnico allegato D.M. 22 agosto 2007, Nuovo obbligo di Istruzione.

Il percorso è basato sull'uso del laboratorio inteso come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici.

Attività (la narrazione sintetica di chi fa che cosa, come, in quali contesti e con quali strumenti, i prodotti attesi)

Le piscine comunali offrono, tra le altre, le seguenti possibilità di accesso, riassunte nella tab. 1.

Qual è la tariffa più conveniente in funzione del numero di ingressi che si intendono effettuare?

Il docente può scegliere se operare con un costo reale in forma decimale, affrontando gli ostacoli relativi alle operazioni con la virgola e alla rappresentazione di coordinate di punti nel piano cartesiano espresse da numeri decimali, oppure con un costo espresso da un numero intero.

Tab. 1	
Tariffa piscina comunale	
Tariffa	Costo
A – singolo accesso	6,5 euro
B – carnet di 10 ingressi	52 Euro

FASE N. 1

Il docente presenta agli studenti la tab. 1 contenente le tariffe e formula la seguente domanda: *Come varia la spesa che occorre sostenere, al variare del numero di ingressi in piscina?*

Per 1, 2, 3, 4, 5 accessi ... costruisce assieme agli studenti, la tab. 2 (numero ingressi, costo), discutendo i risultati e riportandoli sulla lavagna.

Tab. 2	
N. ingressi	Costo
1	6,5
2
3	19,5
.....	26

Utilizzando i dati della tariffa B, il docente costruisce con i ragazzi la tab. 3.

Il lavoro viene svolto alla lavagna attraverso il confronto e la discussione guidata dal docente.

Tab. 3	
N. ingressi	Costo
$1 \leq n \leq 10$	52
$10 < n \leq 20$	104
$20 < n \leq 30$	156
.....	

Relativamente ad entrambi i casi (tab. 2 e 3) il docente chiede di esprimere – prima in modo discorsivo e successivamente usando un simbolismo matematicamente più strutturato – la relazione che intercorre tra il numero degli ingressi ed il costo cioè la spesa sostenuta.

Si procede sintetizzando alla lavagna le frasi formulate dagli studenti, che descrivono la relazione richiesta.

Tariffa A: ad es. "all'aumentare del numero di volte che si va in piscina aumenta la spesa... si paga di più". Nella frase non è esplicitata la proporzionalità diretta tra ingressi e costo. Il docente interviene accompagnando gli studenti a formulare congetture e a verificare l'esistenza di un rapporto costante tra ingressi e costi.

Si perviene progressivamente ad una formulazione matematicamente più corretta, del tipo: "se divido il costo per il numero di ingressi, ottengo sempre lo stesso risultato".

⁸ Elaborazione dei contenuti a cura di Grazia Grassi.

Si sollecitano ora gli studenti ad esprimere lo stesso concetto nel registro algebrico, pervenendo alle seguenti espressioni.

- Numero degli ingressi effettuati = n
- Spesa sostenuta per effettuare tali ingressi = S

La relazione che intercorre tra ingressi e spesa è esprimibile prima come $S : n = 6,5$ e, successivamente, come $S = 6,5 \times n$, dove il numero degli ingressi, indicato dalla lettera n , varia da 1 fino a 30.

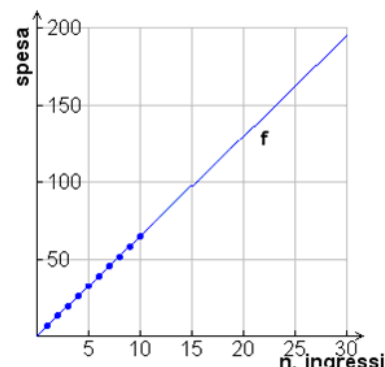
Il passaggio richiede la gestione sensata delle operazioni di divisione e moltiplicazione.

Se il docente lo ritiene opportuno, può esplicitare il ricorso ai principi di equivalenza delle equazioni.

A partire dalla formalizzazione elaborata $S = 6,5 \times n$, il docente conduce la classe a visualizzare tale relazione in un grafico (fig. 1). Nel grafico la retta di supporto è continua, e quindi il docente dovrà / potrà introdurre il concetto di funzione lineare $y = kx$, con un approccio intuitivo all'idea di continuo.

Nel caso considerato, la funzione lineare risulterà: $y = 6,5 \cdot x$

Fig. 1



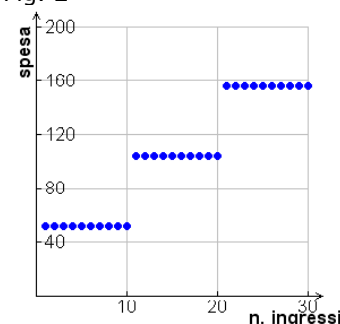
Tariffa B - Si procede in modo analogo per la tariffa B. In termini discorsivi gli studenti potrebbero formulare la seguente frase: "da 10 a 20 ingressi il costo, la spesa è 104 euro", senza fare esplicito riferimento al fatto che il 10 è escluso e il 20 è compreso.

La difficoltà presente nella formalizzazione consiste nell'uso del segno di minore in relazione ad un intervallo limitato e per di più riferito ad un insieme discreto.

Il docente, in questo caso, propone preliminarmente il ricorso alla visualizzazione attraverso l'elaborazione del grafico riportato in fig.1. Tale elaborazione può essere realizzata con il ricorso ad una discussione guidata, con successiva sintesi alla lavagna, oppure dividendo la classe in gruppi di lavoro che procedono autonomamente e successivamente relazionano e si confrontano sui risultati.

Infine, l'insegnante propone la formalizzazione algebrica del problema, evidenziando passo dopo passo la corrispondenza fra quanto visualizzato nel grafico e la formalizzazione stessa.

Fig. 2



$$S = \begin{cases} 52 & 1 \leq n \leq 10 \\ 104 & 10 < n \leq 20 \\ 156 & 20 < n \leq 30 \end{cases}$$

Il docente può utilizzare la lavagna tradizionale per costruire e sintetizzare le conclusioni del lavoro di classe. Nel caso ne abbia la disponibilità, può ricorrere alla lavagna interattiva multimediale come strumento che consente di costruire con gli studenti significati condivisi.

Abilità e Conoscenze (connesse a competenze di Asse e che costituiscono oggetto di verifica)

1. *formulare domande di base* relativamente alla situazione in esame (ad esempio: "quanto costano 2, 3, 4, 5 ingressi? Come posso costruire una tabella di valori?) e comprendere le rispettive risposte;
2. *seguire e motivare processi quantitativi standard* (determinare il costo per un certo numero di ingressi alle condizioni iniziali date; rappresentare le coppie di valori in tabelle;
3. *costruire, comprendere e manipolare tabelle di valori*; costruire grafici a partire dalle tabelle di valori.
4. *riconoscere e sfruttare modelli matematici conosciuti*, individuando le relazioni tra le grandezze coinvolte ed esprimendole nel registro algebrico e grafico
5. *sapere utilizzare il linguaggio algebrico formale* per effettuare calcoli con procedure di routine, nel contesto assegnato.
6. *esprimere sia in forma orale, sia scritta* argomentazioni semplici relative alle relazioni numeriche che emergono dall'esame del problema e comprendere quando tali questioni sono espresse da altri;
7. *conoscere ed utilizzare carta quadrettata e millimetrata*, matita, squadre nel loro contesto usuale (matematico - geometrico).

Verifica e valutazione

La valutazione relativamente a questa fase ha valenza formativa e si avvale di *Rubric* (griglie di osservazione) condivise con gli studenti, relativamente alle principali prestazioni sollecitate.

Le voci che si prevede di inserire nella *Rubrica* sono poste in relazione alle Abilità e Conoscenze descritte nel paragrafo precedente, da declinare in livelli diversi a seconda delle scelte del docente della classe. Ad esempio:

Lo studente formula domande coerenti rispetto alla situazione – problema in esame, è in grado di costruire, comprendere e manipolare tabelle di valori, riconosce ed utilizza modelli matematici conosciuti (funzione lineare) per esprimere le relazioni tra le grandezze, sa formalizzare relazioni nel linguaggio dell'algebra e sviluppare procedure di calcolo conosciute, sa motivare con adeguate argomentazioni le scelte fatte in relazione al problema, sa utilizzare gli strumenti (matita, riga, squadra, carta millimetrata, foglio elettronico).

FASE N. 2

Il docente pone il seguente quesito: "Quando è più conveniente la Tariffa A? Quando è più conveniente la Tariffa B?" e sollecita gli studenti a mettere a confronto i grafici di fig. 1 e 2, elaborando il grafico di fig. 3.

Il sapere leggere ed interpretare i grafici costituisce una abilità da perseguire con una prassi didattica che sviluppi nello studente la capacità di porre in correlazione i diversi registri rappresentativi (tabulare e algebrico) con il registro grafico. In particolare, nella Fig.3, interviene il concetto di tasso di variazione che è uguale a zero negli intervalli in cui la funzione è costante e che è invece costante nel caso della funzione lineare. Si tratta delle radici cognitive del concetto di derivata che sarà incontrato negli studi superiori

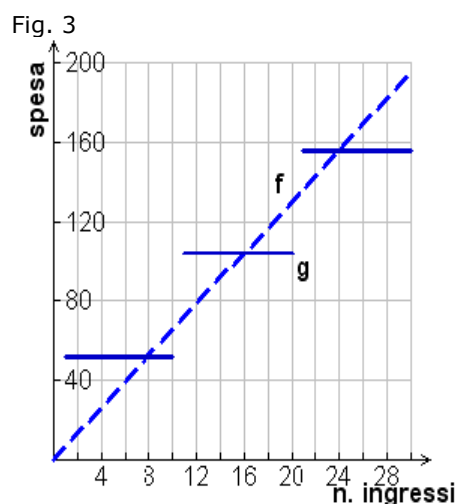
Il grafico evidenzia i punti di indifferenza, in corrispondenza dei quali la spesa è indipendente dalla tariffa scelta: $n = 8$, $n = 16$, $n = 24$

Inoltre, si evidenziano gli intervalli nei quali è più conveniente una tariffa anziché l'altra.

Il confronto dei due grafici porta a formulare ipotesi che, con l'aiuto del docente, gli studenti possono sintetizzare nella tab. 4.

Tab. 4

n. ingressi	Tariffa più conveniente
$1 \leq n < 7$	A
$n = 8$	indifferente
$9 \leq n \leq 10$	B
$11 \leq n \leq 15$	A
$n = 16$	indifferente
$17 \leq n \leq 20$	B
$21 \leq n \leq 23$	A
$n = 24$	indifferente



Agli studenti sarà chiesto di rappresentare con un grafico (fig. 4) la situazione e di porre a confronto le informazioni ottenute dai due registri di rappresentazione, motivando le scelte effettuate per costruire la tabella e il grafico ed esplicitando le correlazioni tra le due rappresentazioni, in forma orale e anche in forma scritta.

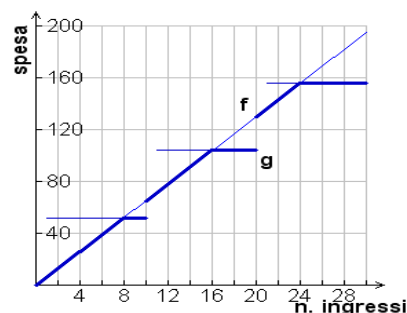
I diversi registri rappresentativi non sono neutri in relazioni alle informazioni che forniscono.

Infatti, i grafici rappresentano due funzioni $f(n)$ e $g(n)$ per le quali si chiede di riconoscere gli intervalli per i quali l'una è maggiore, minore o uguale all'altra. Si tratta di funzioni da \mathbb{N} in un sottoinsieme di \mathbb{Q} , il cui grafico è rappresentato in un sistema non monometrico.

La scelta consapevole dell'unità sugli assi mobilita il concetto di misura e di unità di misura. Si opera in riferimento alla realtà e, quindi, i calcoli si svolgono in un sottoinsieme dell'insieme dei numeri "con la virgola"; dal punto di vista matematico è un sottoinsieme dell'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali. Quindi, al momento, l'insieme \mathbb{R} non è coinvolto, nemmeno a livello intuitivo.

Fig. 4

Il docente può utilizzare la lavagna tradizionale per costruire e sintetizzare le conclusioni del lavoro di classe. Nel caso ne abbia la disponibilità, può ricorrere alla lavagna interattiva multimediale come strumento che consente di costruire con gli studenti significati condivisi.



Abilità e Conoscenze (connesse a competenze di Asse e che costituiscono oggetto di verifica)

1. decodificare, codificare e interpretare le rappresentazioni grafica, linguistica ed algebrica delle relazioni espresse dal problema e passare agevolmente da una rappresentazione all'altra;
2. comprendere e manipolare le relazioni individuate in contesti algebrici e grafici; formulare domande, seguire, motivare e valutare semplici ragionamenti di carattere matematico in risposta al problema, facendo anche ricorso a semplici domande di tipo euristico ("Cosa potrebbe succedere se varia il prezzo di un ingresso? E se varia il prezzo di 10 ingressi? E se variano entrambi? Cosa sappiamo? Cosa vogliamo ottenere?");
3. spiegare, sia in forma orale sia scritta, scelte, strategie, calcoli e risultati relativi alla risoluzione del problema; comprendere quando tali questioni sono espresse da altri;
4. interpretare la corrispondenza modello-realtà in entrambe le direzioni nella situazione assegnata;
5. strutturare matematicamente la situazione proposta in contesti conosciuti, ma diversi da quello iniziale, e saper interpretare la corrispondenza modello-realtà in entrambe le direzioni (ad esempio, al variare dei parametri della situazione);
6. decodificare e interpretare il linguaggio algebrico formale, saperlo utilizzare per manipolare le relazioni algebriche formalizzate e i grafici costruiti in contesti conosciuti, ma diversi da quello iniziale.
7. conoscere ed utilizzare carta quadrettata e millimetrata in contesti conosciuti, ma diversi da quello matematico - geometrico iniziale per formulare congetture e validarle o meno;

Verifica e valutazione

La valutazione relativamente alla fase 2 ha valenza formativa e si avvale di *Rubric* (griglie di osservazione) condivise con gli studenti, relativamente alle principali prestazioni sollecitate.

Le voci che si prevede di inserire nella *Rubric* sono poste in relazione alle Abilità e Conoscenze descritte nel paragrafo precedente, da declinare in livelli diversi a seconda delle scelte del docente della classe. Ad esempio:

Lo studente, in contesti diversi da quello matematico iniziale, sa passare agevolmente da una rappresentazione all'altra, sa spiegare in forma orale e scritta scelte, strategie, calcoli e risultati, sa interpretare la corrispondenza modello-realtà, utilizza gli strumenti da disegno e manipola le relazioni algebriche e i grafici costruiti.

Relativamente alle **Fasi 1 e 2**, quale **verifica sommativa** si propone la seguente prova:

Che cosa accade se l'amministrazione Comunale decide di aumentare il prezzo del biglietto a 8 Euro per ingresso e stabilisce il prezzo di 10 ingressi a 60 Euro? Rappresenta anche in questo caso la situazione con tabelle e grafici. In quale caso è più conveniente usare la tariffa A oppure la tariffa B? Esponi le tue considerazioni per iscritto.

Lo studente può avvalersi sia degli strumenti da disegno utilizzati nel lavoro in classe sia del foglio elettronico.

FASE N. 3

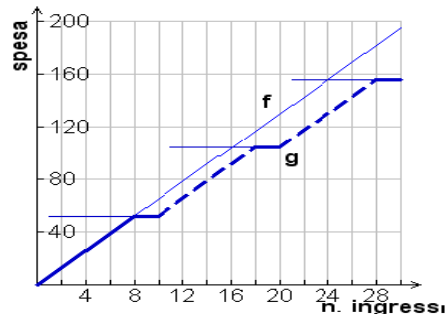
La soluzione trovata sembra convincente, ma forse c'è qualcosa di migliore.

Può essere conveniente una combinazione delle due tariffe (abbonamento + biglietto singolo)?

Rappresenta la situazione con una tabella e spiega le tue motivazioni ai compagni e per iscritto.

Il docente invita gli studenti ad osservare attentamente il grafico di fig. 5. In questa fase, la strategia didattica attivata fa ricorso al *cooperative - learning*. La classe è suddivisa in gruppi e ogni componente ha un preciso compito da svolgere (coordinare il lavoro del gruppo, prendere appunti sul lavoro del gruppo e stendere assieme ai compagni una relazione condivisa, riferire le conclusioni raggiunte dal gruppo durante la fase finale di intergruppo).

Fig. 5



Abilità e Conoscenze (connesse a competenze di Asse e che costituiscono oggetto di verifica)

1. formulare domande complesse relativamente alla situazione (ad esempio: "Quali aspetti sono matematicamente significativi? Ad esempio: insiemi numerici di appartenenza delle variabili, relazione di proporzionalità tra grandezze, si tratta di una funzione? è biunivoca?, ha senso la rappresentazione con una retta "continua", che cosa rappresenta il coefficiente angolare della retta") e comprendere le rispettive risposte;
2. formulare, seguire, motivare e valutare ragionamenti, anche complessi, di carattere matematico ("Cosa potrebbe succedere? Cosa sappiamo? Cosa vogliamo ottenere? Quali proprietà sono essenziali e significative? In che relazione si pongono gli oggetti?");
3. spiegare, sia in forma orale sia scritta, scelte, strategie, calcoli e risultati relativi alla risoluzione di problemi caratterizzati da argomentazioni logiche anche complesse; comprendere quando tali questioni sono espresse da altri.

La valutazione relativamente alla fase 3 ha valenza formativa e si avvale di *Rubric* (griglie di osservazione) condivise con gli studenti, relativamente alle principali prestazioni sollecitate.

Competenze di cittadinanza (correlate agli "oggetti" ed alle "attività")

Le Competenze di cittadinanza, correlate agli oggetti e alle attività proposte e che si intendono perseguire, sono schematizzate nella seguente tabella:

	Competenze di cittadinanza
Utilizzare esperienze provenienti dall'ambito informale (frequenza impianti sportivi) per dare significato a concetti della matematica (concetto di funzione e di equazione)	Imparare ad imparare
Comprendere le informazioni contenute in una tabella (relazioni matematiche), esprimerle in linguaggi diversi (verbale, matematico $S = 6,5 \times n$, simbolico $y = 6,5 \cdot x$, utilizzando supporti cartacei, informatici e multimediali)	Comunicare
Interagire costruttivamente coi compagni e con l'insegnante, durante le attività che coinvolgono l'intera classe e nel lavoro di gruppo, finalizzate alla ricerca di regolarità e relazioni	Collaborare e partecipare
Fornire i propri contributi al lavoro della classe, rispettando le regole e assumendosi le responsabilità dei contributi forniti	Agire in modo autonomo e responsabile
Valutare i dati forniti dalle tabelle, elaborarli e rappresentarli nel linguaggio dell'algebra, trarne conseguenze coerenti con la situazione problematica	Risolvere problemi
Individuare regolarità e formalizzare relazioni, usando consapevolmente simboli e lettere dell'algebra	Individuare collegamenti e relazioni
Leggere e comprendere tabelle di dati, tradurle con rappresentazioni diverse, traendo da ciascun registro le informazioni più attendibili per lo scopo da raggiungere (convenienza delle tariffe di ingresso alla piscina)	Acquisire ed interpretare l'informazione

Raccordi

Si possono ipotizzare raccordi con altre situazioni legate al mondo reale, ad esempio presentando il seguente problema:

La tabella seguente riporta il ricavo ed il profitto (in milioni di dollari) della Luxottica Group S.p.a. fra il 1991 e il 1994. (Fonte: Datastream. New York Times, 1.4. 1995. Le cifre sono approssimate)⁹

– Riesci a determinare una relazione tra ricavo e profitto? Puoi usare una tabella oppure un grafico per punti.

– Quale relazione lega la variazione del profitto e la variazione del ricavo? Esprimi

tale relazione con $\frac{\Delta P}{\Delta R}$. Motiva la tua risposta.

– Esprimi nel linguaggio algebrico la relazione che lega P con R e rappresentala nel piano cartesiano. Motiva le tue scelte

	1991	1992	1993	1994
Ricavo	400	350	380	500
Profitto	55	45	51	75

Ulteriori raccordi con: lo studio di aspetti della realtà socio-economica del territorio, dell'assetto urbano della città, delle condizioni igieniche e sanitarie dei luoghi pubblici, dei principi base di fisica ...

Abilità e Conoscenze

1. strutturare matematicamente situazioni reali in contesti sconosciuti e inusuali e saper interpretare la corrispondenza modello-realtà in entrambe le direzioni;
2. identificare problemi matematici in situazioni reali, ricondurli a problemi matematici, anche in forma aperta, risolvibili attraverso procedure non standard che coinvolgano ipotesi, assunzioni e diversi metodi di rappresentazione; saper valutare criticamente il modello e le strategie adottate ed i risultati ottenuti;
3. combinare creativamente le diverse forme di rappresentazione degli oggetti del piano cartesiano;
4. decodificare e interpretare il linguaggio algebrico formale, saperlo utilizzare per manipolare equazioni di circonferenze e rette ed effettuare calcoli con procedure di routine, il tutto in contesti sconosciuti e inusuali.

⁹ Brandi P., Salvatori A. *Laboratori di innovazione didattica 2006/2007*